TS **EXPONENTIELLE** feuille 8

PROBLEME

On se propose d' étudier la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par :

$$f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$$

1) **variations de f**

a) Déterminer la dérivée f ' de f sur] 0 ; +∞ [

b) étudier le sens de variations de f

c) Déterminer la limite de f en +∞

2) étude d' une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par : g(u) = $1-(1+u)e^{-u}$

a) calculer la dérivée de g

b) prouver que pour tout $u \geq 0$

$0 \leq g'(u) \leq u$

c) en déduire pour tout $u \geq 0$: $0 \leq g(u) \leq \dfrac{u^2}{2}$ (1)

(on pourra étudier la fonction $u \to g(u) - \dfrac{u^2}{2}$)

3) étude de f au voisinage de +∞

a) à l' aide de (1) établir que pour tout $x > 0$: $0 \leq x - f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$

b) En déduire que Cf admet une asymptote Δ et préciser la position de Cf par rapport à Δ

4) étude de la tangente à Cf en un point
Soit a un réel de] 0 ; +∞ [et Ta la tangente au point d' abscisse a

a) déterminer une équation de Ta

b) montrer que Ta coupe l' axe des abscisses au point d' abscisse $\dfrac{a}{1+a+a^2}$