Exercice 8:

Pour n entier naturel, on pose $F(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à n qui sont premiers avec n, 1 compris.
1: Que peut-on dire de n si $F(n) = n-1$?
2: Déterminez $F(n)$ pour n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10.
3: Montrez que si p est un entier naturel premier , alors $F(p^2)= p^2 - p$.

Exercice 9:

1: Montrez que si a , b , c et d sont réels alors $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.
2: On pose S comme étant l'ensemble des entiers naturels non nuls n tels qu'il existe a et b entiers naturels non nécessairement nuls tels que $n=a^2 + b^2$.
a: Indiquez quels sont les entiers qui appartiennent à S dans la liste suivante:
2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 17 ; 19 ; 23 ; 37 ; 41 ; 43.
b: Montrez que si n et m appartiennent à S alors n.m appartient aussi à S.
D'une façon générale, montrez que si k entiers appartiennent à S alors leur produit appartient aussi à S.
c: Montrez que 4810 appartient à S.
d: Montrez que si p premier strictement supérieur à 2 appartient à S alors p = 1 modulo 4
(ou encore p=1[4] ou le reste de la division euclidienne de p par 4 est 1)
e: Peut-on écrire 1999 comme somme de deux carrés d'entiers?

Exercice 10:

p est un entier naturel premier.
1: Montrer que pour tout k entier naturel compris entre 1 et (p-1), on a: $\binom{p}{k} = p \times \binom{p-1}{k-1}$

2: Montrez alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $(n^p - n)$ est divisible par p.
Ce résultat est connu sous le nom de PETIT THEOREME DE FERMAT.