Exercice 1:France-Métropolitaine Juin-1999

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres: $a_n = 4.10^n - 1$, $b_n = 2.10^n - 1$ et $c_n = 2.10^n + 1$ 1:

a) Calculez a_n , b_n et c_n pour n = 1 , 2 et 3.

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres? Montrez que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrez, en utlisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 que b_3 est premier.

d) Montrez que, pour tout entier naturel n, $b_n.c_n = a_{2n}$. Déduisez-en la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e) Montrez que PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n , 2). Déduisez-en que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2: On considère l'équation : (1): $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a) Justifiez le fait que (1) possède au moins une solution.

b) Appliquez l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3. Déduisez-en une solution particulière de (1).

c) Résolvez l'équation (1).

Exercice 2:Polynésie Juin-1999

1: Démontrez que, pour tout entier naturel n: $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
Déduisez-en que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2: Déterminez les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3: Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier: $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$. a)

Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p par 7?

b) Démontrez que si p = 3n + 1 , alors A_p est divisible par 7.

c) Etudiez le cas où p = 3n + 2.

4: On considère les nombres a et b écrits dans le système binaire: a = 1001001000 et b = 1000100010000.
Vérifiez que ces deux nombres sont des entiers de la forme A_p.

Sont-ils divisibles par 7?

Exercice 3:Amérique du Nord Juin-1999

Les trois parties I, II et III peuvent être traitées indépendamment les une des autres.

Partie I

Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.
Déterminez les paires { a ; b } d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
a) L'entier (n - 1)! + 1 est-il pair?
b) L'entier (n - 1)! + 1 est-il divisible par un entier naturel pair?
2: Montrez que l'entier (15 - 1)! +1 n'est pas divisible par 15.
3: L'entier (11 - 1)! +1 est-il divisible par 11?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier (p > 1).
1: Montrez que p admet un diviseur q (1< q < p)
2: L'entier q divise-t-il l'entier (p - 1)! +1 ?
3: L'entier p divise-t-il l'entier (p - 1)! +1 ?