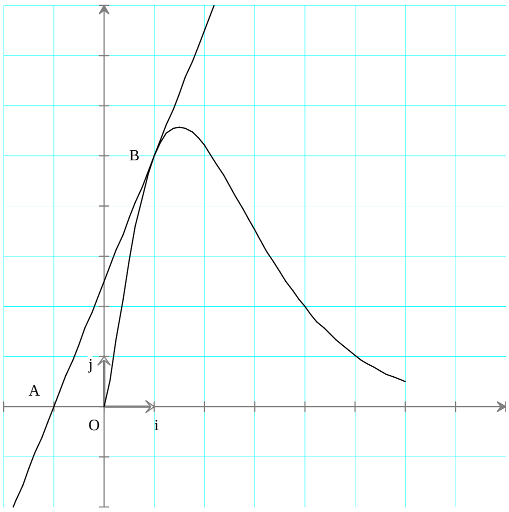
Classe de TES$_1$ ***Lundi 26 septembre 2005***

Devoir de mathématiques n°1

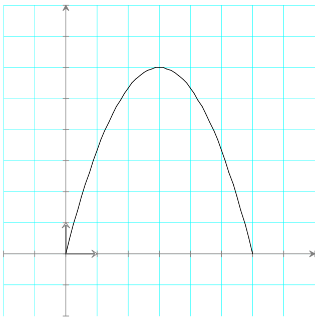
Exercice 1 (Bac ES, Asie, juin 2005, 5 points)

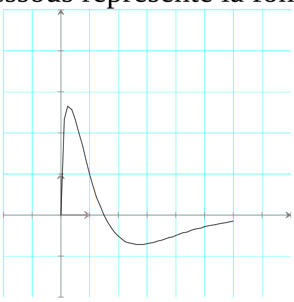
La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur [0 ; 6]. Les points A et B ont pour coordonnées $A(-1;0), B(1;5)$. B est un point de C_f, et la droite (AB) est tangente à C_f.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la dérivée de la fonction f.



2. Une des trois courbes ci-dessous représente la fonction f'. Laquelle (justifier).





3. On appelle g la fonction définie sur [0 ; 6] par $g(x)=\sqrt{f(x)}$. Donner l'expression de sa dérivée g' (à l'aide de f et f'), calculer $g'(1)$.

Exercice 2) (Bac ES, 1992, 15 points)

On se propose d'étudier des fonctions et leur représentation graphique, puis d'en voir une application économique.

Partie A - Etude de fonctions

Soit la fonction numérique C définie dans [0 ; 300] par : $C(x)=\dfrac{x^3}{30}-15x^2+2500x$

1. Calculer $C'(x)$, C' désigne la fonction dérivée de C.
   Etablir le tableau de variations de C ' sur [0 ; 300] et en déduire son signe.
2. On rapporte le plan (P) au repère orthogonal (O ; i , j) (unités graphiques : 0,5 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour 10 000 unités sur l'axe des ordonnées).
   On appelle (C) la courbe représentative de C dans (P). On note A le point de (C) d'abscisse 150.
   Chercher une équation de T, la tangente à (C) en A.
   En utilisant le sens de variations de C ' tel qu'il a été établi dans la question 1., indiquer la position de (C) par rapport à T.
3. Construire la courbe (C) et T.

Partie B - Application économique

Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction : $C(x)=\frac{x^3}{30}-15x^2+2500x$

On appelle coût marginal la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire, on choisit comme modélisation de ce coût marginal ; $C_m(x) = C'(x)$
On suppose que l'entreprise est en situation de monopole, ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix

La relation liant le prix de vente p et la demande x (en unités) est : $p(x)=-\frac{45}{8}x+2750$.

{autrement dit, quand x objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$ }

1. Calculer la recette totale $R(x)$ pour la vente de x unités.
2. On appelle recette marginal l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire.
   On modélise cette recette marginale par : $r_m(x) = R'(x)$ où R ' est la dérivée de R

   Pour quelle valeur de x la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?

3. Montrer que le bénéfice pour la production et la vente de x unités est donné par :

$$B(x)=-\frac{x^3}{30}+\frac{75x^2}{8}+250x$$

   Calculer $B'(x)$, où B ' représente la fonction dérivée de B.
   En déduire que le bénéfice est maximum quand la recette marginale est égale au coût marginal.
   Que vaut ce bénéfice maximum ?