Exercice 3

1) Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution, que l'on note α. Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de α.

c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie pour tout $x \in]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

a. i. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

ii. En déduire le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.

iii. En utilisant la définition de α, démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

b. i. Démontrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$f(x) = 2x + \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

ii. En déduire que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe représentant f et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

iii. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une autre asymptote.