CORRECTION DU TEST MATHEMATIQUES PE1 du 01/10/2010 (1h30)

Exercice 1 :

On sait que a est un chiffre en base 10, donc a est un entier compris entre 0 et 9.
D'autre part, on sait que m est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9, ce qui équivaut à $3a + 6$ divisible par 9. Comme $3a + 6 = 3(a + 2)$, on en déduit que m est divisible par 9 si et seulement si $a + 2$ est divisible par 3.
La méthode exhaustive, avec a variant entre 0 et 9, indique que les seules valeurs de a qui conviennent sont $a = 1$, $a = 4$, ou $a = 7$.
Les valeurs de m cherchées sont donc **131 211**, **434 241** et **737 271**.

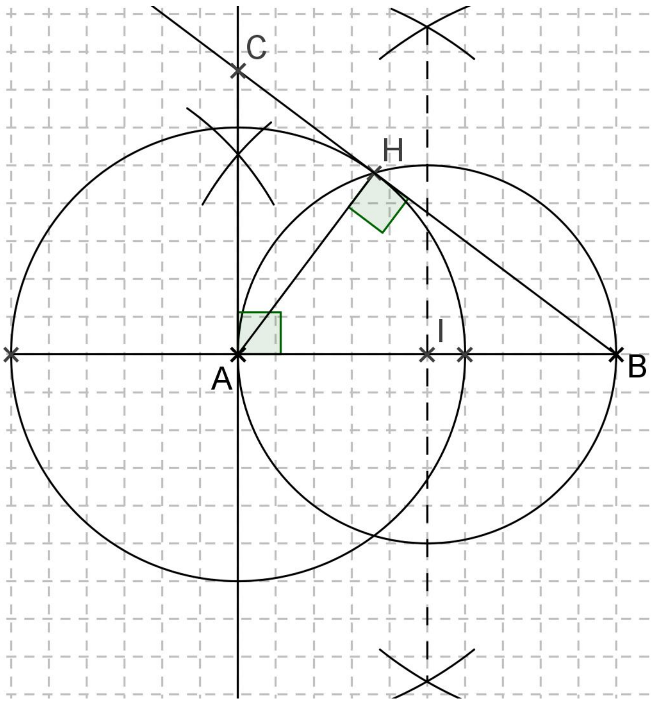
Exercice 2 :

Notons $n = 1\ 357\ 924\ 680$. Tout d'abord, $n = 135\ 792\ 468 \times 10$, donc le problème revient à montrer que $m = 135\ 792\ 468$ est divisible par 36.
m est pair, donc divisible par 2. D'autre part, après division par 2, le chiffre des unités sera 4, puisque $68 = 2 \times 34$. On en déduit que l'on pourra diviser m une deuxième fois par 2, donc m est divisible par 4.
Par ailleurs, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 2 + 4 + 6 + 8 = 45$ est divisible par 9, donc m est divisible par 9.
Or $4 = 2^2$ et $9 = 3^2$ sont premiers entre eux, puisque leur seul diviseur commun est 1.
Finalement, m est divisible par 4, m est divisible par 9, avec 4 et 9 qui sont premiers entre eux : le théorème de Gauss nous indique alors que m est divisible par $4 \times 9 = 36$, et donc en conclusion que $\boldsymbol{n}$ **est divisible par 360**, d'après la remarque préliminaire.

Exercice 3 :

1. Exemple 1 : $1 \times 3 = 3$ et $3 = 4 \times 0 + 3$ la proposition est **vérifiée** pour cet exemple.
   Exemple 2 : $3 \times 5 = 15$ et $15 = 4 \times 3 + 3$ la proposition est encore **vérifiée** pour cet exemple.
2. Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire sous la forme $2n + 1$ et $2n + 3$, avec n entier naturel. Leur produit est $p = (2n + 1)(2n + 3)$. En développant, on obtient $p = 4n^2 + 8n + 3$, d'où $p = 4(n^2 + 2n) + 3$. On en déduit donc que p s'écrit sous la forme $4q + 3$, avec $q = n^2 + 2n$, qui est entier. Le reste de la division de p par 4 est bien égal à 3, donc la proposition « Dans la division par 4 du produit de deux nombres impairs successifs, le reste est égal à 3 » est **vraie**.
3. Contre-exemple, avec 1 et 5 (qui ne sont pas consécutifs…) : $1 \times 5 = 5$, et $5 = 4 \times 1 + 1$. Le reste est $1 \neq 3$, donc la proposition « Dans la division par 4 du produit de deux nombres impairs, le reste est égal à 3 » est **fausse**.

Exercice 4 :



1. a. Voir la figure ci-contre (échelle ½, avec quadrillage) :
   b. Description rapide de la construction :
   - Tracer le cercle C_1 de centre A et de rayon 6.
   - Tracer le cercle C_2 de diamètre $[AB]$.
   - Noter H un point d'intersection de C_1 et C_2.
   - Tracer la perpendiculaire d à la droite (AB) passant par A.
   - La demi-droite $[BH)$ recoupe la droite d en C.
2. a. Dans le triangle SNR, rectangle en S, on a , d'après le théorème de Pythagore : $NR^2 = SR^2 + NS^2$, d'où $NR^2 = 4{,}8^2 + 6{,}4^2$, d'où , après calcul, $NR^2 = 64$, d'où $\boldsymbol{NR = 8}$.
   Dans le triangle MNR, rectangle en R, on a , d'après le théorème de Pythagore : $MN^2 = MR^2 + NR^2$, d'où $MR^2 = MN^2 - NR^2$, ce qui donne $MR^2 = 10^2 - 8^2$, d'où , $MR^2 = 36$, d'où $\boldsymbol{MR = 6}$.
   b. Dans le triangle MNP, on a :

$$\left.\begin{array}{l} N, R, P \text{ alignés} \\ N, S, M \text{ alignés} \\ (RS) // (PM) \end{array}\right\}, \text{ d'où } \frac{NS}{NM} = \frac{MP}{SR} = \frac{NP}{NR}, \text{ d'après le th. de Thalès.}$$

On en déduit que $MP = \dfrac{NS}{NM} \times SR$, d'où après calculs, $\boldsymbol{MP = 7{,}5}$.

On obtient de même $NP = \dfrac{NS}{NM} \times NR$, d'où après calculs, $\boldsymbol{NP = 12{,}5}$.

Remarque : le triangle MNP est superposable au triangle ABC de la question a : ce sont deux triangles rectangles du type 3, 4, 5 agrandis 2,5 fois.