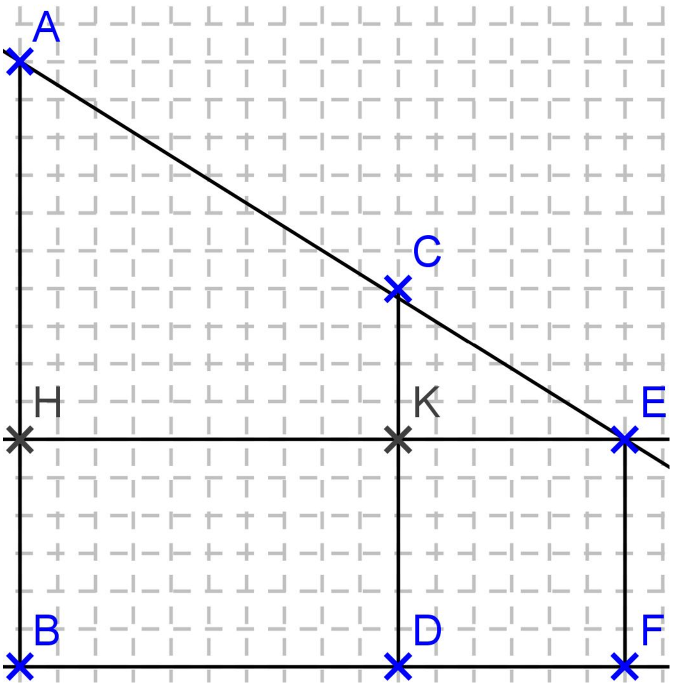
**CORRECTION DES EXERCICES 5, 6 et 7 DE GEOMETRIE PLANE (3) : Théorème de Thales.**




**Exercice 5**

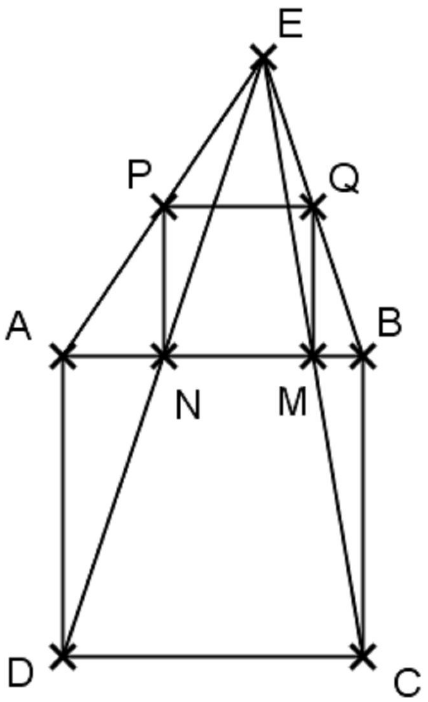
1. Figure ci-contre à l'échelle ¼.
2. Traçons la droite $(AE)$ et la droite $(d)$ perpendiculaire à $(AB)$ passant par $E$, qui coupe $(CD)$ en $K$ et $(AB)$ en $H$.

Supposons que le point $C$ appartienne à la droite $(AE)$.
Sachant que $B$, $D$, $F$ sont alignés et que $(CK)$ // $(AH)$, le théorème de Thales dans $AEH$ donne $\frac{EH}{EK} = \frac{AH}{CK}$.

Or $\frac{EH}{EK} = \frac{FB}{FD} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$, et $\frac{AH}{CK} = \frac{AB - EF}{CD - EF} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$.

Or $\frac{8}{3} \neq \frac{5}{2}$, car $8 \times 2 \neq 5 \times 3$. On aboutit à une contradiction.
On en conclut en raisonnant par l'absurde que l'hypothèse initiale est fausse : les points $A$, $C$, $E$ ne sont pas alignés.

**Exercice 6**




1. Voir ci-contre.
2. Dans le triangle $EAD$, les points $P$ et $N$ appartiennent aux segments $[EA]$ et $[ED]$, avec $(PN)$ // $(AD)$. Le théorème de Thales nous donne

$$\frac{EP}{EA} = \frac{EN}{ED} = \frac{PN}{AD} \qquad (1).$$

Dans le triangle $EBC$, le même raisonnement donne $\frac{EQ}{EB} = \frac{EM}{EC} = \frac{QM}{BC}$ (2).

Dans le triangle $EDC$, le même raisonnement donne $\frac{EN}{ED} = \frac{EM}{EC} = \frac{MN}{DC}$ (3).

On conclut de (3) que tous ces rapports sont égaux à un même nombre réel $k$.
En particulier, dans le triangle $EAB$, points $P$ et $Q$ appartiennent aux segments $[EA]$ et $[EB]$,avec $\frac{EP}{EA} = \frac{EQ}{EB} = k$.
D'après la réciproque du théorème de Thales, on en conclut que $(PQ)$ // $(AB)$.
Finalement, dans le quadrilatère $MNPQ$, on a $(PN)$ // $(QM)$ et $(PQ)$ // $(MN)$. D'autre part, $(PN) \perp (MN)$. Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme ayant un angle droit, donc $MNPQ$ est un rectangle.
Par ailleurs, $\frac{PN}{AD} = \frac{MN}{DC} = k$, donc $PN = kAD$ et $MN = kDC$. Sachant que $ABCD$ est un carré, on a $AD = DC$, d'où l'on déduit que $PN = MN$.
Le rectangle $MNPQ$ a deux côtés consécutifs de même longueur, donc $MNPQ$ est un carré.

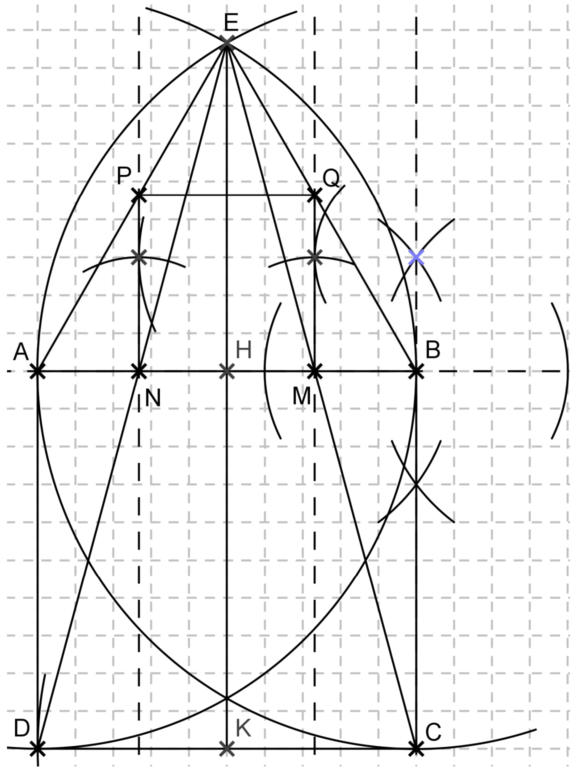
2. a. Figure en cm à l'échelle $2{,}5$ page suivante : difficile de ne pas oublier un trait de compas avec le quadrillage…

b. i. Le triangle $EAB$ étant équilatéral, le point $H$ est le milieu de $[AB]$ et plus généralement, la droite $(EK)$ est un axe de symétrie de la figure. $H$ est donc le milieu de $[AB]$ et $K$ est le milieu de $[CD]$.
Le triangle $AEH$ est rectangle en $H$, le théorème de Pythagore donne $EH^2 = EA^2 - AH^2$, d'où $EH^2 = 4 - 1 = 3$.
On en déduit que $EH = \sqrt{3}$.
Sachant que $EK = EH + HK$, avec $HK = AD = 2$, on a $EK = 2 + \sqrt{3}$.

ii. Dans le triangle $EKD$, rectangle en $K$, on sait que $H$ et $N$ sont des points des segments $[ED]$ et $[EK]$, et que $(NH)$ // $(KD)$. Le théorème de Thales donne $\dfrac{HN}{KD}=\dfrac{EH}{EK}$, d'où $HN = KD\times\dfrac{EH}{EK}$.

On en déduit que $HN=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, d'où $PQ=\dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

On trouve $PQ \approx 0{,}9$ cm. Sur la figure à l'échelle 5, on trouve $4{,}6$ cm environ, ce qui est cohérent avec le résultat précédent .




**Exercice 7**

1. En utilisant le logiciel, on constate que, si $TU \approx 12$ cm et $UC \approx 9$ cm, alors $CE \approx 7$ cm. Prouvons-le.:

Dans le quadrilatère croisé $LCTS$, le théorème de Thalès peut s'appliquer (configuration du papillon).

On a alors $\dfrac{LC}{TS}=\dfrac{UC}{UT}$, d'où $\dfrac{LC}{TS}=\dfrac{3}{4}$. Or $LAST$ est un parallélogramme, donc $LA = TS$, d'où $\dfrac{CA}{TS}=\dfrac{1}{4}$.

On applique alors le théorème de Thalès au triangle $ETS$ : on obtient $\dfrac{CA}{TS}=\dfrac{EC}{ET}$, d'où $\dfrac{EC}{ET}=\dfrac{1}{4}$.

Sachant que $ET = 21 + EC$, on obtient après produit en croix $4\ EC = 21 + EC$, d'où $3\ EC = 21$, d'où l'on déduit que $EC = 7$ cm.

2. Description de la construction, à l'échelle ½, tracée ci-dessous : on place le point $T$ quelconque. On construit deux cercles de centre $T$ et de rayon 6 et $10{,}5$ cm. On choisit $U$ quelconque sur le premier cercle, d'où l'on obtient $C$ par alignement. On choisit $S$ quelconque, la parallèle à $(TS)$ passant par $C$ coupe $(SU)$ en $L$. Le point $A$ est alors l'intersection de $(LC)$ et de la parallèle à $(TL)$ passant par $S$. Le point $E$ cherché est alors le point d'intersection des droites $(TU)$ et $(SA)$.