

EXERCICE (d' après sujet métropole septembre 2010)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$$

Soit f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$

alors pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) a) Dans un repère orthonormé tracer C_f et la droite Δ d' équation $y = x$
placer u_0 et construire u_1 , u_2 et u_3

b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite
(u_n) ?

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n - 1 > 0$

b) Démontrer les conjectures émises à la question 1) b)

3) Dans cette question , on se propose d' étudier la suite (u_n) par une autre méthode

pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

b) pour tout entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire la limite de la suite (u_n)