**CORRECTION DE L'EXERCICE 4 DE GEOMETRIE PLANE (2) : Théorème de Pythagore.**

**Exercice 4 : les triplets pythagoriciens.**

a- Un triangle $ABC$ dont les mesures des côtés sont proportionnelles à $3$, $4$ et $5$ $\text{cm}$ a ses côtés de longueur $AB = 3k$, $AC = 4k$, et $BC = 5k$, avec $k$ nombre réel quelconque. On alors $(3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$ et $(5k)^2 = 25k^2$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

b- Le raisonnement est identique : un triangle $ABC$ dont les mesures des côtés sont proportionnelles à $5$, $12$ et $13$ $\text{cm}$ a ses côtés de longueur $AB = 5k$, $AC = 12k$, et $BC = 13k$, avec $k$ nombre réel quelconque. On alors $(5k)^2 + (12k)^2 = 169k^2$ et $(13k)^2 = 16k^2$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

c- Idem : soit $ABC$ un triangle dont les mesures des côtés sont $BC = n^2 + p^2$, $AB = p^2 - n^2$, et $AC = 2np$,. On alors $AB^2 + AC^2 = (p^2 - n^2)^2 + (2np)^2$, d'où $AB^2 + AC^2 = p^4 - 2n^2p^2 + n^4 + 4n^2p^2$, d'où $AB^2 + AC^2 = p^4 + 2n^2p^2 + n^4$.

On a de même $BC^2 = (n^2 + p^2)^2$ , d'où $BC^2 = p^4 + 2n^2p^2 + n^4$.

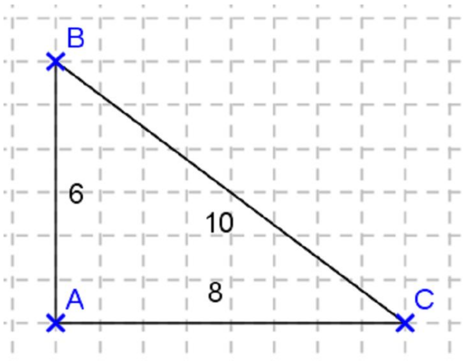
On en déduit que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

d- Il nous suffit d'exhiber un triangle vérifiant les conditions de la question c, mais ne vérifiant pas celles des questions a et b ;

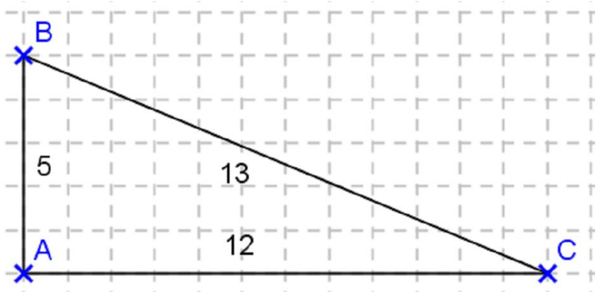
Méthode exhaustive :

| $n$ | $p$ | $p^2 - n^2$ | $2np$ | $n^2 + p^2$ | Commentaire |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | triangle du type a ($k = 1$) |
| 1 | 3 | 8 | 6 | 10 | triangle du type a ($k = 2$) |
| 2 | 3 | 5 | 12 | 13 | triangle du type b ($k = 1$) |
| 1 | 4 | 15 | 8 | 17 | triangle de type ni a, ni b |

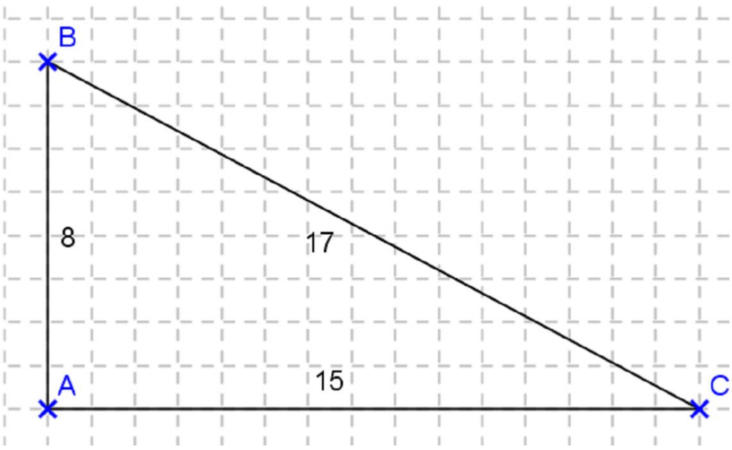
Conclusion : le triangle $ABC$ tel que $AB = 15$, $AC = 8$ et $BC = 17$ est un triangle rectangle, qui n'est ni du type de ceux de la question a, ni du type de ceux de la question b.




Triangle du type a




Triangle du type b




Triangle du type d