GEOMETRIE PE 1

Deuxième partie :

le raisonnement mathématique

les configurations et théorèmes de base

1. Le raisonnement mathématique

Une définition du raisonnement :

« Activité de l’esprit qui passe, selon des principes déterminés, d’un jugement à un autre, pour aboutir à une conclusion »

(Grand Robert)

Différents types de raisonnement

- déductif : du général au général (ou particulier)

A utiliser dans une démonstration mathématique.

Généralement du type **implication** : « si (condition) alors (conclusion) ».

Rédaction type : on sait « données (hypothèse) », donc « conclusion ».

- inductif : du particulier au général

On « devine une propriété générale » (conjecture) en multipliant les exemples.

Donne des idées, mais est à proscrire dans une démonstration mathématique, sauf si l'on valide la conjecture par un raisonnement… déductif !

- par analogie : du particulier au particulier

Permet de mettre en évidence les ressemblances/différences entre les objets.

Très utile pour structurer les connaissances, mais inutilisable dans un raisonnement mathématique : à valider par un raisonnement… déductif !

Implication, réciproque, équivalence

- Une implication est une proposition du type « Si (donnée), alors (conclusion) ».
- L’implication réciproque de la précédente est l’implication « Si (conclusion), alors (donnée) ».
- Lorsqu’une implication et son implication réciproque sont toutes les deux vraies, on dit que « (donnée) équivaut à (conclusion) ».

  rédaction type : « (donnée) si et seulement si (conclusion)».

La démonstration mathématique : différentes méthodes pour passer des données à la conclusion

- Méthode exhaustive : traiter cas par cas.

Avantage : ne traiter que des exemples

Inconvénients : inutilisable s'il y a une infinité de cas, coûteuse en temps s'il y en a un nombre fini trop important.

- Méthode générale : traiter tous les cas en même temps.

Avantage : utilisable s'il y a une infinité de cas

Inconvénient : plus abstraite

- Méthode par l'absurde : supposer le contraire de la conclusion, pour aboutir à une contradiction par rapport aux données.

Avantage : facile à utiliser quand la conclusion est sous forme négative…

Inconvénient : parfois difficile à formuler (négation), encore plus abstraite !

Et si l’on veut montrer qu’une proposition est fausse, comment fait-on?

- Si cette proposition est une implication du type « si (données), alors (conclusion) », on exhibe un exemple vérifiant les données, mais pas la conclusion.
- Si cette proposition est une équivalence, on se ramène au cas précédent en montrant que soit l’implication, soit sa réciproque, est fausse.

Deux compétence de base pour faire une démonstration

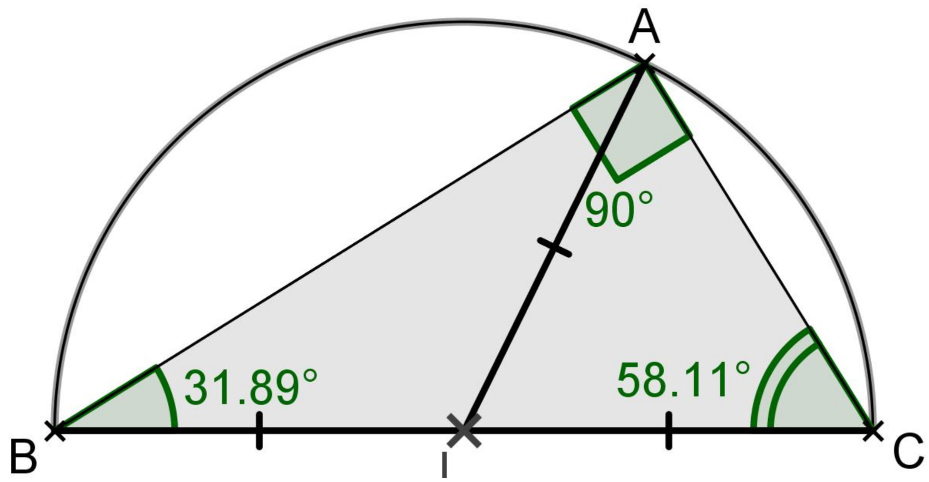
- Repérer des configurations dans la figure.
- Connaître les propriétés de chaque configuration de la figure.

Un exemple ?

2. Configurations et théorèmes de base

Configuration du triangle rectangle

- $\widehat{BAC}$ est un angle droit.
- $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires.
- IA = IB = IC.



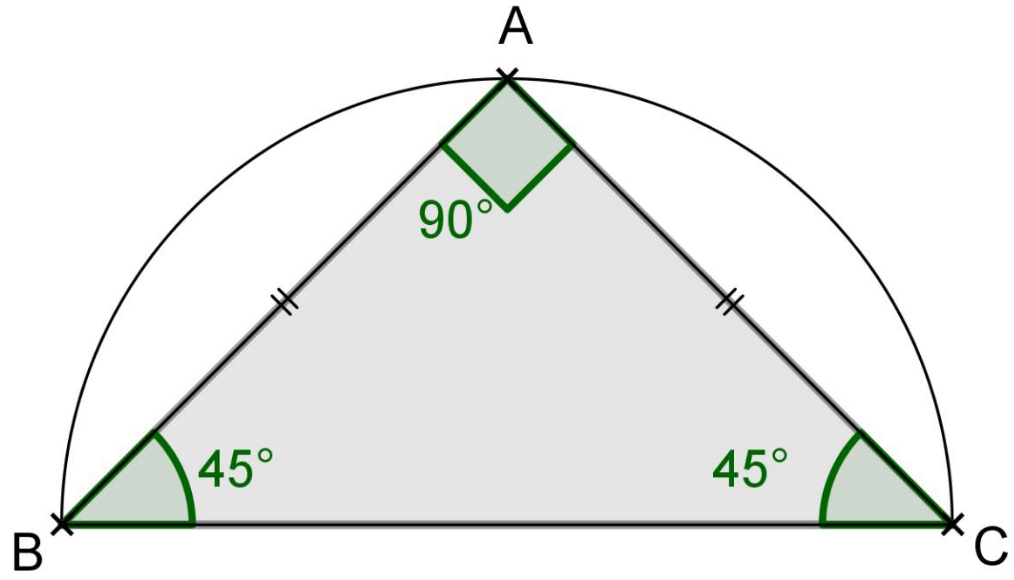
Théorème de Pythagore : si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

une preuve par une construction

Réciproque : si, dans un triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Configuration du triangle rectangle isocèle

- AB = AC
- IB = IC = IA
- $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = 45°$

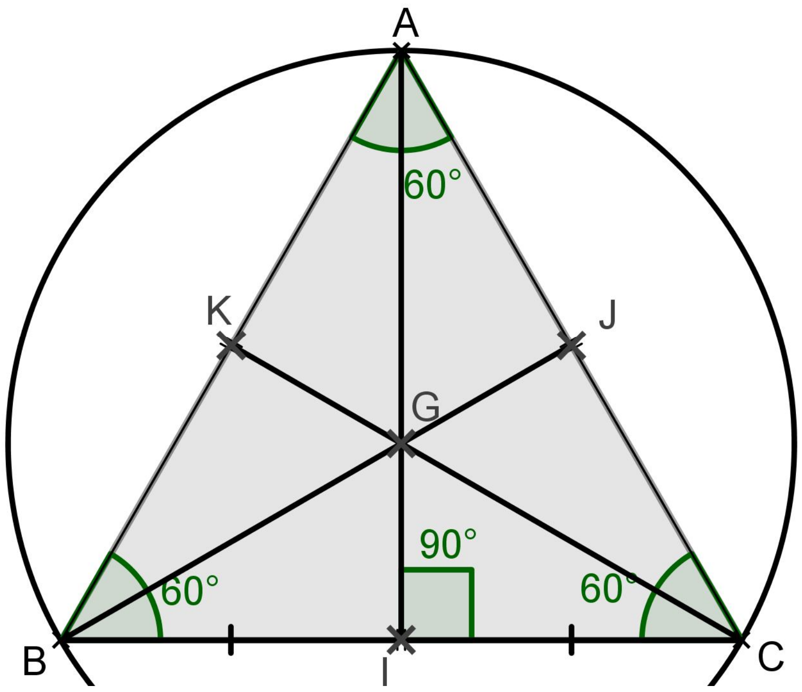


Théorème : BC = AB x $\sqrt{2}$, et IA = AB x $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Configuration du triangle équilatéral

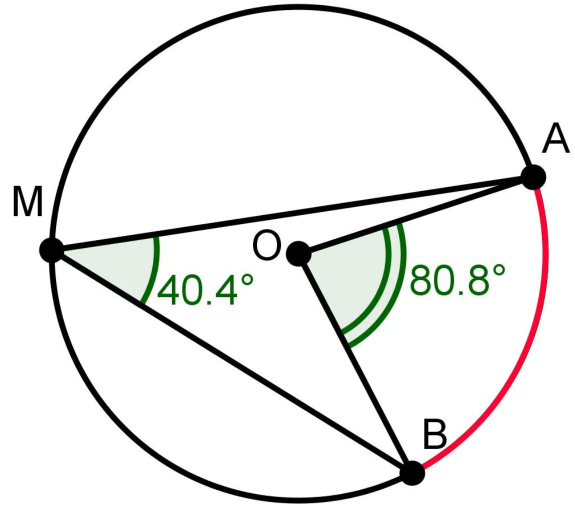
- AB = AC = BC
- IB = IC = JC = JA = KA = KB
- AI = BJ = CK
- $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 60°$

Théorème : AI = AB x $\frac{\sqrt{3}}{2}$



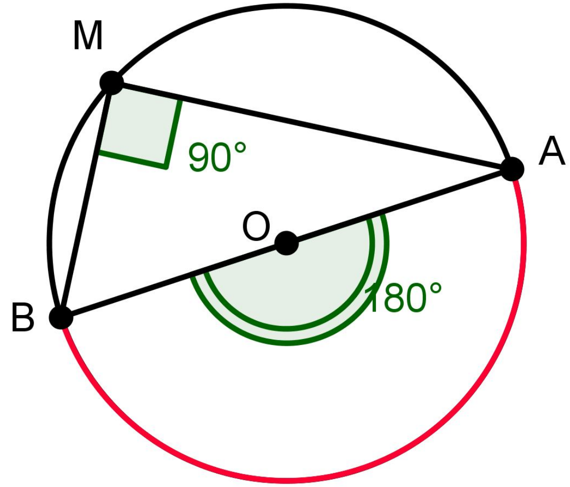
Configuration du cercle inscrit

Définition : on appelle angle inscrit dans un cercle de centre O tout angle coupant le cercle en A et B et dont le sommet M est un point du cercle. L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre.

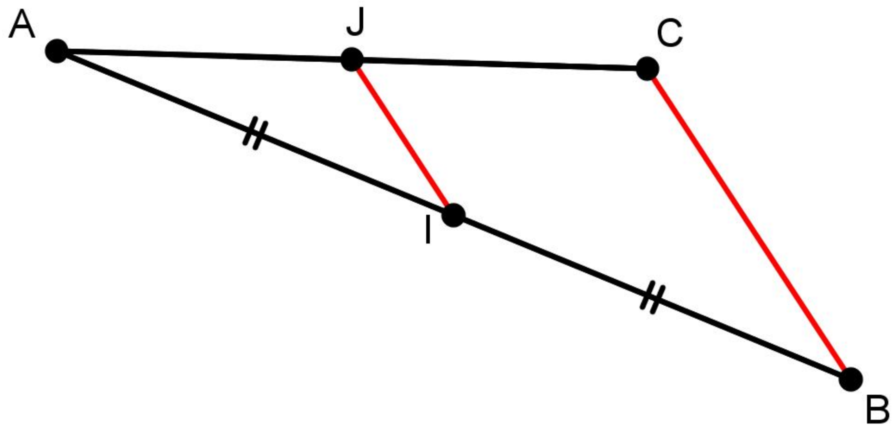


Théorème 1 : Si l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$, alors $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB}$.

Conséquence : Si* [AB] *est un diamètre d'un cercle et* M *un point de ce cercle,
***alors le triangle* AMB *est rectangle en* M.**



Configuration des milieux



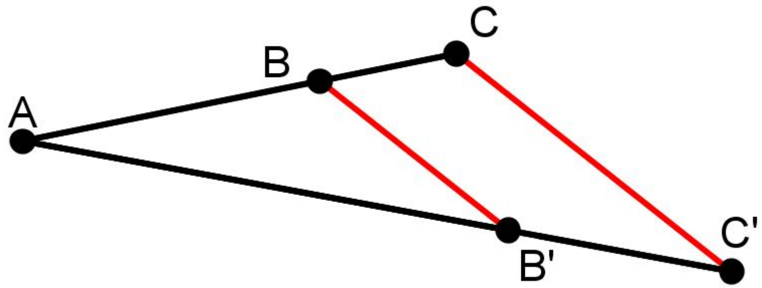
- ABC est un triangle,
- I est le milieu de [AB],
- J est un point de (AC).

Théorème des milieux : Si (IJ) est parallèle à (BC), alors J est le milieu de [AC].

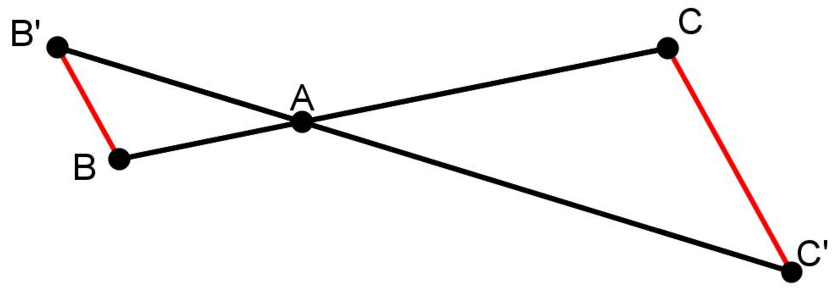
Réciproque : si J est le milieu de [AC], alors (IJ) est parallèle à (BC).

Remarque : dans les deux cas, on peut aussi conclure que* BC = 2 IJ*.

Configurations de Thales



Configuration triangle



Configuration papillon

- A, B, C sont trois points alignés,
- B', C' sont deux autres points, avec A, B', C' alignés dans le même ordre que A, B, C.

Théorème de Thales : Si (BB') est parallèle à (CC'), alors $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$

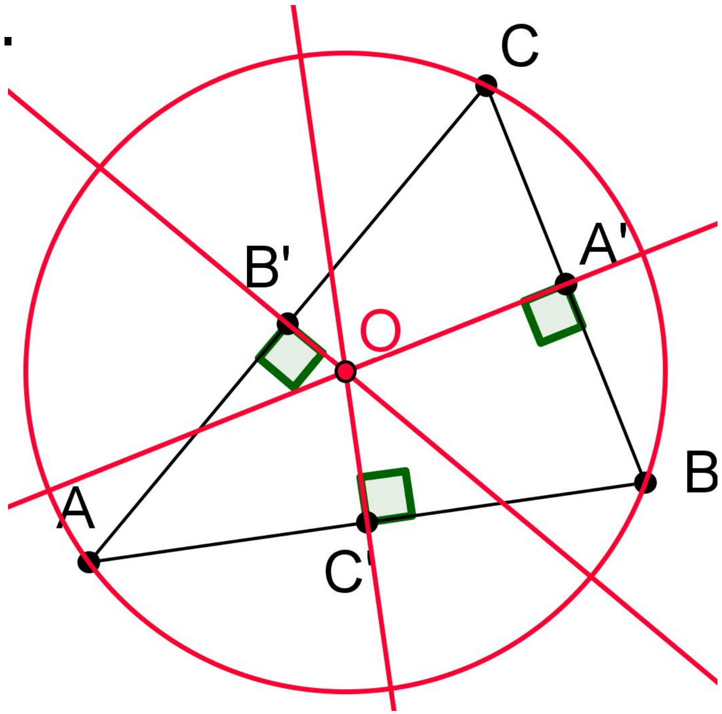
Réciproque : si $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$**, alors (BB') est parallèle à (CC').**

Remarque : dans les deux cas, on peut aussi conclure que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}$$

Configuration des médiatrices

- A’, B’, C’ sont les milieux des côtés.
- Les médiatrices sont perpendiculaires aux côtés.



Théorème : les trois médiatrices d’un triangle sont concourantes au point O centre du cercle passant par les trois sommets du triangle.

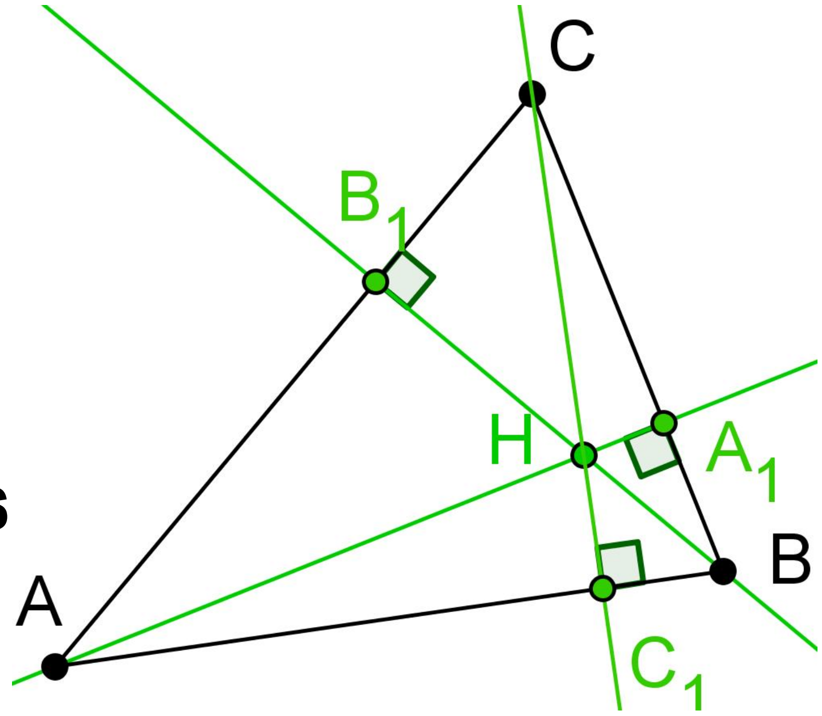
Définition : le point O s’appelle le centre du cercle circonscrit au triangle.

Configuration des hauteurs

- Les hauteurs passent par les sommets.
- Les hauteurs sont perpendiculaires aux côtés.

Théorème : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H.

Définition : le point H s'appelle l'orthocentre du triangle.

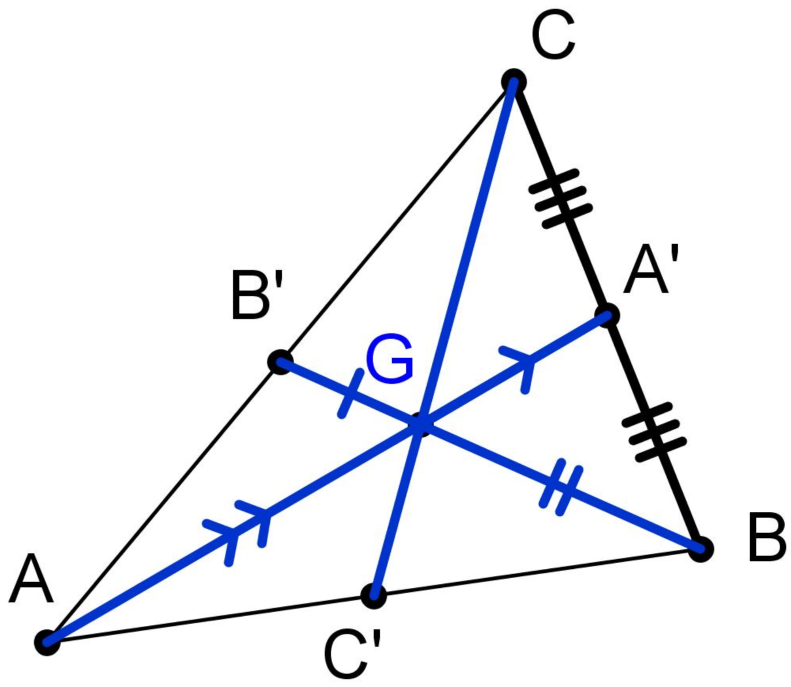


Configuration des médianes

- A’, B’, C’ sont les milieux des côtés.
- Les médiatrices passent par les sommets du triangle.

Théorème : les trois médianes d’un triangle sont concourantes au point G situé aux deux tiers de chaque médiane.

Définition : le point G s’appelle le centre de gravité du triangle.



Configuration des bissectrices

- Les bissectrices sont les axes de symétrie des 3 angles.

Théorème : les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes au point I centre du cercle tangent aux 3 côtés du triangle.

Définition : le point I s'appelle le centre du cercle inscrit dans le triangle.