EXERCICE 1 (d' après sujet nouvelle calédonie 2006)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$$

1) a) Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par : f(x) = $\frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

Etudier le sens de variation de f , dresser le tableau de variations de f , déterminer les limites de f aux bornes de l' intervalle] 0 ; +∞ [

Dans un repère orthonormé (unité 2 cm) tracer Cf et la droite d' équation y = x

b) construire les premiers termes de la suite (u_n) : u_0 , u_1 , u_2 et u_3

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geq \sqrt{2}$

b) Montrer que pour tout réel x ≥ $\sqrt{2}$: f(x) ≤ x

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1

d) Prouver que la suite (u_n) converge

3) Soit L la limite de la suite (u_n) . Montrer que L est solution de l' équation :

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

En déduire la valeur de L