## 82 Asie juin 2004

Retour au tableau

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où $a$ est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$ ; $13 = 9 + 2^2$ etc.
On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

**1.** Étude de l'équation d'inconnue $a$ : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4$.

1. Montrer que si $a$ existe, $a$ est impair.
2. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

**2.** Étude de l'équation d'inconnue $a$ : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$.

1. Montrer que si $n \geqslant 3$, $3^n$ est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
2. Montrer que si $a$ existe, il est pair et en déduire que nécessairement $n$ est pair.
3. On pose $n = 2p$ où $p$ est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

**3.** Étude de l'équation d'inconnue $a$ : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

1. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si $n$ est impair.
2. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2 c** démontrer qu'il existe un unique entier naturel $a$ tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.