

EXERCICE (d' après sujet inde 2003)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbf{N} par :

$$u_0 = a \quad \text{et pour tout entier } n \quad u_{n+1} = u_n (2 - u_n)$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$

1) on suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$

a) Calculer u_1 et u_2

b) dans un repère orthonormé (unité 8 cm) tracer sur l' intervalle $[0 ; 2]$ la droite (d)

d' équation $y = x$ et la courbe \mathbf{P} représentant la fonction $f : x \rightarrow x(2 - x)$

c) utiliser (d) et \mathbf{P} pour construire u_1 , u_2 et u_3

2) On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l' intervalle $]0 ; 1[$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n : 0 < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante

c) Que peut-on en déduire ?

3) on suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$

On considère la suite (v_n) définie sur \mathbf{N} par $v_n = 1 - u_n$

a) Exprimer pour tout entier n v_{n+1} en fonction de v_n

b) En déduire l' expression de v_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)