

# Corrigé de l'énigme 1

1. On constate que le chiffre des dizaines est toujours 9, et que la somme du chiffre des unités et de celui des centaines est également 9, d'où le « truc » : on place en centaine le complément à 9 du chiffre des unités donné par l'interlocuteur, en dizaine 9, en unité le chiffre donné par l'interlocuteur et on annonce le nombre.

2. On peut écrire  $n$  sous la forme  $cdu$ , où  $c, d, u$  désignent des chiffres.

On a alors  $n = c \times 100 + d \times 10 + u$ , et  $N = u \times 100 + d \times 10 + c$ .

Supposons  $c \geq u$ . On a alors  $n \geq N$ , d'où  $D = n - N$ , d'où  $D = 100c + 10d + u - (100u + 10d + c)$ .

Après calcul, on obtient  $D = 99c - 99u$ , d'où  $D = 99(c - u)$ .

Dans le cas où  $u \geq c$ , on obtient de même  $D = 99u - 99c$ , d'où  $D = 99(u - c)$ .

Dans les deux cas, on constate que  $D = 99 \times \Delta$  est un multiple de 99 supérieur à 0 et inférieur à 900 ( $0 \leq \Delta \leq 9$ ,  $\Delta$  étant la différence positive entre deux chiffres).

Il existe exactement 10 multiples de 99 qui conviennent, qui sont 0, 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891 : dans tous les cas, sauf le premier, on constate que la propriété de la question 1 est toujours vérifiée.

Or le premier cas correspond à  $c = u$ , c'est-à-dire  $n = N$  : si l'interlocuteur annonce 0, il faut donc lui répondre 0 (et pas 990). Dans tous les autres cas, on applique le « truc » vu à la question 1.

## Défi n°1 : un tour de magie

1. Le « magicien » fait la somme de chacun des nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32 situés en haut des disques pour lesquelles la réponse a été « OUI » ...

2. Explication : on sait que chaque nombre entier a une décomposition unique dans la base 2, avec les seuls chiffres 0 et 1. Tout nombre  $N$  compris entre 1 et 60, étant inférieur à  $64 = 2^6$ , a une décomposition unique du type  $a \times 2^5 + b \times 2^4 + c \times 2^3 + d \times 2^2 + e \times 2^1 + f \times 2^0$ , d'où  $N = a \times 32 + b \times 16 + c \times 8 + d \times 4 + e \times 2 + f \times 1$ . La réponse « OUI » à un disque s'interprète en comptant 1 pour la lettre correspondante dans la décomposition du nombre, la réponse « NON » en comptant 0.

Conséquence : le disque du « 1 » va être composé de tous les nombres de 1 à 60 pour lesquels  $f = 1$ , celui du « 2 » à de tous les nombres de 1 à 60 pour lesquels  $e = 1$ , etc...

Par exemple, le disque du « 4 » est conçu par les nombres s'écrivant en base 2 avec l'écriture en base deux  $abc1ef_2$ ,

ce qui donne une décomposition de la forme  $a \times 32 + b \times 16 + c \times 8 + 1 \times 4 + e \times 2 + f \times 1$ . Or,  $a \times 32 + b \times 16 + c \times 8$  est un multiple de 8, et  $e \times 2 + f \times 1$  peut prendre pour seules valeurs 0, 1, 2, 3. On en conclut que les nombres composant le disque du « 4 » sont les nombres de la forme  $8n + 4$ , ou  $8n + 5$ , ou  $8n + 6$ , ou  $8n + 7$ .

Avec des raisonnements analogues, précisons comment est conçu chaque disque, dans le cas où on veut compter jusqu'à 100 : il y aura 1 disque de plus (car  $2^6 = 64 < 100$ ) : les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Disque du	Nombres en fonction de l'entier $n$	$n$ variant de ....	à .....	Nombres par disque
« 1 »	$2n + 1$	0	49	50
« 2 »	$4n + 2$ ou $4n + 3$	0	24	50
« 4 »	$8n + 4$ ou $8n + 5$ ou $8n + 6$ ou $8n + 7$	0	11, et 1 pour $n = 12$	$48 + 1 = 49$
« 8 »	$16n + 8$ à $16n + 15$	0	5	48
« 16 »	$32n + 16$ à $32n + 31$	0	2	48
« 32 »	$64n + 32$ à $64n + 63$	0	0, et 5 pour $n = 1$	37
« 64 »	$128n + 64$ à $128n + 100$	37 chiffres pour $n = 0$		37

Au verso, les disques sous forme de cartes à jouer :

Carte du « 1 » :

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63
65	67	69	71
73	75	77	79
81	83	85	87
89	91	93	95
97	99		

Carte du « 8 » :

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63
72	73	74	75
76	77	78	79
88	89	90	91
92	93	94	95

Carte du « 2 » :

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63
66	67	70	71
74	75	78	79
82	83	86	87
90	91	94	95
98	99		

Carte du « 16 » :

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63
80	81	82	83
84	85	86	87
88	89	90	91
92	93	94	95

Carte du « 4 » :

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63
68	69	70	71
76	77	78	79
84	85	86	87
92	93	94	95

Carte du « 32 » :

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63
96	97	98	99
100			

Carte du « 64 » :

64	65	66	67
68	69	70	71
72	73	74	75
76	77	78	79
80	81	82	83
84	85	86	87
88	89	90	91
92	93	94	95
96	97	98	99
100			