Corrigé type de l'examen d'Optimisation Stochastique

Exercice 1 /8points

(0.25) **(0.25)** **(0.5)**	1) Un PL est un système d'équations ou d'inéquations (contraintes) qui sont linéaires sous lesquelles on doit optimiser une fonction objectif linéaire. Dans un PL tous les éléments sont connus avec **certitude.** Un PLS est un PL où certain paramètres sont **stochastique**. Un PLS-R en deux étapes : est un PLS où les décisions se divisent en deux types : - décidions stratégique à prendre avant la réalisation d'un événement aléatoire - des décisions correctives à prendre après la réalisation de cet évènement.
(0.25) **(0.25)** **(0.25)** **(0.25)**	2) le principe de la méthode de la valeur estimée consiste à remplacer chaque variable aléatoire par son **estimation** et puis résoudre le PL résultant. Dans ce cas on aura **une seule solution.** Le principe de la méthode d'analyse de scénarios consiste à résoudre le PLS pour toutes les réalisations possibles des variables aléatoires. Dans ce cas on aura **autant de solutions que de scénarios.**
(0.5) **(0.25)** **(0.25)**	3) Dans un PLS avec recours en deux étapes si l'intersection de l'ensemble des solutions admissibles de la première étape avec l'ensemble des contraintes induites est vide : **on conclut que le problème de seconde étape n'est jamais faisable.** Dans ce cas il faut réviser notre modèle (peut être il y avait **une erreur dans la modélisation**), ou chercher **d'autres actions de recours possible** dont on n'a pas encore considérées.
(1)	4) la formulation du programme de seconde étape dans un PLS avec recours: $Q(x,\xi^j) = \min\{q(\xi)^T y \| W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x,\ y \geq 0\}$
(0.5) **(0.5)**	5) l'exécution de l'étape de génération de coupes de faisabilité dans l'algorithme L-Shaped n'est plus nécessaire quand le recours est **complet** ou **relativement complet.** Une fois il est nécessaire de passer par cette étape, on doit s'arrêter quand le problème de seconde étape soit faisable pour tous les scénarios possibles
(0.5) **(0.25)** **(0.25)**	6) Le nombre de réalisation = 2*3*4= 24 Le nombre de problèmes esclaves =24 (un par scénario) Une seule variable est ajoutée au problème maître
 (0.25) **(0.25)** **(0.25)** **(0.25)**	7) la formulation du programme maître à résoudre dans la version multi-coupe : $min\, c^T x + \sum_{s=1}^{\|S\|} \theta_s$ $sc.\, Ax = b$ ${\beta_{ts}}^T x + \theta_s \geq \alpha_{ts}, t \in I_k, s = 1, \dots, \|S\|$ ${\beta_t}^T x \geq \alpha_t, t \notin I_k$ $x \geq 0$
(0.5) **(0.5)**	8) même nombre de problème esclaves mais on doit ajouter 24 variables au problème maître

Exercice 2

 (0.25) **(0.25)** **(0.25)** **(0.25)**	**Partie A** Q est linéaire par morceau, parce que dans chaque intervalle Q prend la forme d'une fonction linéaire de la forme ax+b. Courbe du premier intervalle. Courbe du deuxième intervalle. Déduction : **concave (n'est pas convexe)** d'après sa courbe représentative en ξ.

 (1) **(1)**	**<u>Partie B</u>** <u>Pour w=0 :</u> $5x_1 - x_2 \geq 5$ $2x_1 + 4x_2 \geq 5$ <u>Pour w=1</u> $5x_1 - x_2 \geq 11$ $2x_1 + 4x_2 \geq 9$ Alors $\boldsymbol{K_2} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2 \vert \boldsymbol{5x_1 - x_2} \geq \boldsymbol{11}, \boldsymbol{2x_1 + 4x_2} \geq \boldsymbol{9}\}$
(0.25) **(0.25)**	prendre l'intersection avec les contraintes de première étape ; x doit appartenir à l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2 \vert \boldsymbol{x_1 + x_2} \geq \boldsymbol{1}, \boldsymbol{5x_1 - x_2} \geq \boldsymbol{11}, \boldsymbol{2x_1 + 4x_2} \geq \boldsymbol{9}\}$
(0. 5) **(0.5)** **(0.5)**	3) Trouver la matrice W =$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ Il faut résoudre les programmes linéaires suivants : **<u>Pour w=0</u>** **Min v** $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$y + $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}$ $\mathbf{y}, \mathbf{v} \geq 0$ **<u>Pour w=1</u>** **Min v** $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$y + $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}$ $\mathbf{y}, \mathbf{v} \geq 0$

<u>Exercice 3</u>

(0.25) **(0.25)** **(0.25)**	1 : corrective 2 : structurante 3 : corrective
(0.75)	**Problème de première étape** $\mathbf{min} \sum_{\mathbf{m=1}}^{\mathbf{12}} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathbf{3}} \boldsymbol{c_i w_{m,i}} + \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]$ $\mathbf{w_{i,m}} \geq \mathbf{0} \ \ \forall \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{3};\ \forall\ \mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{12}.$
  (1) **(1)** **(1)** **(1)**	**Problème de seconde étape** $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{min} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathbf{3}} \sum_{\boldsymbol{m=1}}^{\mathbf{12}} (\boldsymbol{b_i v_{i,m}} + \mathbf{c_i} \boldsymbol{z_{i,m}})$ $\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathbf{3}} (\boldsymbol{e_m} \mathbf{w_{i,m}} + \boldsymbol{v_{i,m}} + \boldsymbol{z_{i,m}}) \geq \mathbf{d_m} \qquad \forall\ \mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{12}.$ $\boldsymbol{v_{i,m}} \leq \boldsymbol{g} \mathbf{e_m} \mathbf{w_{i,m}} \qquad \forall \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{3};\ \forall\ \mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{12}.$ $\boldsymbol{e_m} \mathbf{w_{i,m}} + \boldsymbol{v_{i,m}} + \boldsymbol{z_{i,m}} \leq \boldsymbol{f_{i-1}} (\boldsymbol{e_m} \mathbf{w_{i-1,m}} + \boldsymbol{v_{i-1,m}} + \boldsymbol{z_{i-1,m}}) \quad \forall \mathbf{i} = \mathbf{2}, \mathbf{3};\ \forall\ \mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{12}.$
(0.25 x 2) **(0.25 x 2)** **(0.25 x 2)**	**R1** : recours reste **complet** mais **plus de dépenses** **R2 :** recours pas relativement complet (n'est pas complet) mais moins de dépenses. **R1 et R2 :** recours pas relativement complet (n'est pas complet) mais dépenses minimales.