Chapitre2

Programmation linéaire stochastique

1. Programmation linéaire

1.1 Définition PL : Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations non strictes appelés contraintes qui sont linéaires (les variables ne sont pas élevées au carré, ne sont pas des exposants, ne sont pas multipliées entre elles,…) sous lesquelles on doit optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction objectif également linéaire.

Les hypothèses de la programmation linéaire sont :

a- Proportionnalité et additivité (ou linéarité)

- ***Proportionnalité*** signifie que la contribution des variables de décision à la fonction objectif et aux contraintes est proportionnelle à leur valeur (par exemple : $3x_1, \frac{3}{4}x_2\ mais\ pas\ \frac{1}{x_1}\ ou\ log(x_2)$).
- ***Additivité*** signifie que la contribution de chaque variable est indépendante de la valeur des autres variables (par exemple $3x_1, + x_2\ mais\ pas\ 3x_1x_2$).

Si cette hypothèse est violée alors il s'agit de programmation non linéaire.

b- Divisibilité: Les variables prennent des valeurs fractionnaires.

Si cette hypothèse est violée alors il s'agit de programmation en nombre entiers.

c- Certitude: chaque paramètre est connu précisément

Si cette hypothèse est violée alors il s'agit de programmation stochastique

Plusieurs ***problèmes de décisions*** pratiques se décrivent sous forme de ***programmes linéaires*** comme suit:

$\min\{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\}$ subject to $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots \qquad\qquad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$ $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0.$	Ou encore $\text{Min F} = \sum c_j x_j$ $\text{s.c} \sum a_{ij} x_j = b_j \quad i = 1, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, n$	Sous forme matricielle $\min c^T x$ $\text{s.t. } Ax = b$ $x \geq 0.$

Objectif : chercher la combinaison des valeurs optimale de x_j qui satisfait les contraintes.

Exemple1 :

Considérons un agriculteur qui possède des terres, de superficie égale à H hectares, dans lesquelles il peut planter du blé et du maïs. L'agriculteur possède une quantité E d'engrais et I d'insecticide. Le blé nécessite une quantité E1 d'engrais par hectare et I1 d'insecticide par hectare. Les quantités correspondantes pour le maïs sont notées E2 et I2.

Soit P1 le prix de vente du blé et P2 celui du maïs. Si l'on note par x1 et x2 le nombre d'hectares à planter en blé et en maïs, alors le ***nombre optimal d'hectares à planter*** en blé et en maïs peut être exprimé comme un programme linéaire:

$\text{Max } P_1x_1 + P_2x_2$ // **maximiser** le revenu net
$\text{S.C } x_1 + x_2 \leq H$ // borne sur le nombre total d'hectares
$E_1x_1 + E_2x_2 \leq E$ // borne sur la quantité d'engrais
$I_1x_1 + I_2x_2 \leq I$ // borne sur la quantité d'insecticide
$x_j \geq 0\ , j = 1,2$ // Trivialement, on ne peut pas planter un nombre négatif d'hectares

1.2 Les formes d'un PL : Un programme linéaire peut avoir les formes suivantes :

a. Forme standard : Un problème est dit sous forme standard si et seulement si toutes *les vraies contraintes,* autre que $x_j \geq 0$, sont des égalités.

$$\left.\begin{array}{l} \min c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ \qquad x \geq 0. \end{array}\right\}$$

b. Forme canonique : Quant à la forme canonique, elle fait intervenir exclusivement des inégalités.

$\text{Min } c^T\ x$

$\text{s.c } Ax \geq b$

$x\ \geq 0$

c. Passage de la forme canonique à la forme standard : cela se fait par introduction des *variables d'écart* dans chaque contrainte d'inégalités.

Exemple 2 : la forme standard du PL du premier exemple est :

$\text{Max } P_1x_1 + P_2x_2$
$x_1 + x_2 + x_3 = H$
$E_1x_1 + E_2x_2 + x_4 = E$
$I_1x_1 + I_2x_2 + x_5 = I$
$x_j \geq 0\ , j = 1,5$

1.3 Faisabilité et optimalité

Etant donné le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \min c^T\ x \\ \text{s.c } Ax = b \\ x\ \geq 0 \end{array}$$

On appelle $B\ = \{x \mid Ax = b\ , x \geq 0\ \}$ l'ensemble de solutions admissibles.

On distingue les cas suivants :

- $B\ \neq \emptyset$ et il existe une solution optimale ;

- $B \neq \emptyset$ et il n'existe pas de solution optimale (une infinité de solutions); dans ce cas, B est nécessairement non borné;
- $B = \emptyset$; Dans un tel cas le problème est sans solution admissible et ne possède évidemment pas de solution optimale (problème irréalisable).

1.4 Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation linéaire correspond à un ***demi-espace*** dans $\mathbb{R}^n$ (un ***demi-plan*** dans $\mathbb{R}^2$).
  - Une demi espace est défini par $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$; a : vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et b un scalaire.
- L'ensemble des solutions d'une équation linéaire correspond à un ***hyperplan*** dans $\mathbb{R}^n$ (une ***droite*** dans R^2).
  - Un hyperplan est défini par : $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations linéaires correspond à l'intersection des ***demi-espaces*** et des ***hyperplans*** associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée domaine admissible, est convexe et définit un ***polyèdre*** P dans $\mathbb{R}^n$ (une région ***polygonale*** dans R^2).
  - P=$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$; A : matrice de dimension $m \times n$ et b vecteur de $\mathbb{R}^m$.
  - **Polyèdre en forme standard :** P=$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$:

Définition (ensemble convexe)

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

1.5 Dualité

Etant donné le programme sous forme primale suivant :

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ s.c\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Où : c et x sont des vecteurs de taille n, b un vecteur de taille m, et A une matrice de taille $m \times n$.

Sa forme duale est:

$$\begin{aligned} \max\ w &= b^T y \\ s.c\ A^t y &\leq c \end{aligned}$$

Où : A, b et c restent les mêmes et y un vecteur de taille m.

Les y_j sont des variables libres.

Théorème de dualité de la programmation linéaire

Soit A une matrice, c et b des vecteurs alors $\min\{c^T x \mid Ax = b\} = \max\{b^T y | A^t y \leq c\}$; Pour autant que les deux ensembles soient non vides.

Remarque : Ce principe peut être avantageusement employé chaque fois que le problème dual est d'une formulation plus pratique que le primal, ce qui est le cas lorsque dans le primal le nombre de variables est inférieur à celui des vraies contraintes.

- Les différentes relations entre le primal et le dual sont résumées dans le tableau suivant :

Primal	min	max	Dual
Contraintes	$\geq b_i$	≥ 0	Variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$=b_i$	Libre	
Variables	≥ 0	$\leq c_j$	Contraintes
	≤ 0	$\geq c_j$	
	Libre	$= c_j$	

NB. Le dual du dual coïncide avec le primal.

Exemple 3

Considérons que le problème primal est de la forme :

$$\begin{aligned} &\min z = c^T x \\ &s.c\ Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Trouvez le programme dual.

a/ en appliquant les règles de transformation

$$\begin{aligned} &\max\ w = b^T y \\ &s.c\ A^t y \leq c \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

b/ en passant par la forme standard

$$\begin{aligned} &\min z = c^T x + o\, u \\ &s.c\ Ax - Iu = b \\ &x \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

Son programme dual selon la définition précédente est :

$$\begin{aligned} &\max\ w = b^T y \\ &s.c\ A^t y \leq c \\ &-I^t y \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à (le programme dual)

$$\begin{aligned} &\max\ w = b^T y \\ &s.c\ A^t y \leq c \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Remarque

Étant donné deux programmes duaux de PL, on a toujours un des trois cas exclusifs :

- Les deux problèmes ont des solutions optimales finie x* et y* telles que $c^T x^* = b^T y^*$.
- L'un n'a pas de solution admissible et l'autre a des solutions admissibles, mais pas de solution optimale finie.
- Aucun des deux n'a de solution admissible.

Exemple 4

Primal	**Dual**
$\max z = x_1 + x_2$	$\min w = y_1$
$s.c - x_1 + x_2 = 1$	$s.c - y_1 + y_2 \geq 1$
$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$	$y_1 - \frac{1}{2}y_2 \geq 1$
$x \geq 0$	

x*=(1,2) avec z=3 et y*=(3,4) et w=3 (les deux solutions sont admissibles et optimales)

Primal	**Dual**
$\max z = x_1 + x_2$	$\min w = y_1$
$s.c - x_1 + x_2 = 1$	$s.c - y_1 + y_2 \geq 1$
$x_1 + x_2 = 0$	$y_1 + y_2 \geq 1$
$x \geq 0$	

Le primale n'a pas de solution admissible ; le duale a des solutions admissibles mais pas une solution optimale finie.

Primal	**Dual**
$\max z = x_1 + x_2$	$\min w = y_1$
$s.c - x_1 + x_2 = 1$	$s.c - y_1 + y_2 \geq 1$
$x_1 - x_2 = 0$	$y_1 - y_2 \geq 1$
$x \geq 0$	

Aucun des deux problèmes n'a de solution admissibles.

2. PL stochastique

L'hypothèse de la connaissance parfaite de tous les éléments du modèle de la PL limite son utilité quand il s'agit de planifier en présence d'incertitudes. Dans plusieurs situations pratiques, les coefficients a_{ij}, b_i , c_j ne sont pas connus avec certitude, mais on connaît seulement leur distribution de probabilité. Quand un ou plusieurs éléments d'un programme linéaire sont représentés par des variables aléatoires, un ***programme linéaire stochastique*** se découle.

2.1. Faisabilité et optimalité sous l'incertitude

La présence d'incertitude influe faisabilité et optimalité :

2.1.1 Approche de la valeur estimée (*EXPECTED VALUE*)

Considérons le PL stochastique suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Min} - x_2 \\ &s.c \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + x_4 = 2 \ldots\ldots (1) \\ &\quad -1 \leq x_1 \leq 1 \\ &\quad x_j \geq 0, j = 2,3,4 \end{aligned}$$

Supposons que les coefficients de x_1 et de x_2 dans (1)ne sont pas connu avec certitude, et qu'on connait leur distribution jointe :

$$(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \begin{cases} \left(1, \frac{3}{4}\right) \text{avec une probabilité 0.5} \\ \left(-3, \frac{5}{4}\right) \text{avec une probabilité 0.5} \end{cases}$$

Dans ce cas : $E[\tilde{a}_{21}]$= -1 et $E[\tilde{a}_{22}]$=1 ; en remplacent les coefficients $\tilde{a}_{21}$ et $\tilde{a}_{22}$ par leurs valeurs estimées on trouvera la solution faisable (x_1, x_2, x_3, x_4)=(0,2,0,0) ; on veut examiner sa faisabilité sous incertitude:

La contrainte correspondante à (1) peut être équitablement :

$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_4 = 2$ ou $-3x_1 + \frac{5}{4}x_2 + x_4 = 2$.

La solution (0,2,0,0) ne satisfait aucune des contraintes et elle est de ce fait infaisable sous incertitude.

Remarque1 : Remplacer les variables aléatoires par leurs estimations ne fournit pas toujours une solution faisable à l'égard des variables aléatoires.

2.1.2 Approche d'analyse de scénarios

Cette approche imite le processus de reporter toutes les décisions jusqu'au dernier moment où toutes les incertitudes seront levées. Par conséquence, les PLs associés à toutes les réalisations possibles peuvent être résolues. Cela donne lieu à plusieurs vecteurs de décisions, un par chaque réalisation possible des variables aléatoires.

Dans l'exemple précédent :

- La solution associée à $(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \left(1, \frac{3}{4}\right)$ est (-1, 3, 0, 0.75).
- La solution associée à $(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \left(-3, \frac{5}{4}\right)$ est (0.1176, 1.8824, 0.0000, 0.0000).

Remarque2 : Comme pour l'approche précédente, aucune solution n'est faisable pour la réalisation alternative. Autrement dit, chaque solution a une probabilité 50% d'échouer à satisfaire la contrainte.

Conclusion

Comme illustré dans les exemples précédents, un modèle de prise de décisions sous incertitude doit prendre en considération les conséquences des futures infaisabilités d'une manière explicite.

Dans la littérature de la programmation stochastique, deux approches sont largement étudiées : une basée sur la modélisation des recours futurs (ou encore réponses) et l'autre restreint la probabilité d'infaisabilité à un certain seuil prédéterminé. Dans la première approche, on parle des problèmes avec recours et dans la deuxième des problèmes à contraintes de hasard.

2.2. Exemple introductif à la PLS avec recours (Planification de production)

Problématique : Il s'agit de minimiser les coûts de production tout en satisfaisant les demandes des clients :

- Le cas le plus trivial (irréaliste): un seul produit, sans contraintes techniques…

min c x *x : production ; w : demande*
s. c x ≥ w
x ≥ 0

- Modèle plus réaliste : plusieurs produits, contraintes sur la productivité et sur la capacité de la production.

Produit				
Matière première	Prod1	Prod2	c	b
mat1	2	3	2	1
mat2	6	3	3	1
relation	≥	≥	=	≤
h	180	162	γ	100

Avec- b : capacité de production (quantité maximale des matières premières qui peut être traitée) ; γ : Coût de production **;** h : demandes des clients

Le programme linéaire suivant décrit le problème de production (*remplacer raw par mat*):

$$\left.\begin{aligned} &\min(2x_{raw1} + 3x_{raw2}) \\ &\text{s.t.} \quad x_{raw1} + x_{raw2} \le 100, \\ &\quad 2x_{raw1} + 6x_{raw2} \ge 180, \\ &\quad 3x_{raw1} + 3x_{raw2} \ge 162, \\ &\quad x_{raw1} \ge 0, \\ &\quad x_{raw2} \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

- Pratiquement, il peut arriver que les productivités ou/et les demandes varient aléatoirement, et qu'on doit prendre notre décision '***plan de production***' avant de connaitre leurs valeurs exactes.

Supposons que :

- Un plan de production est à décider chaque semaine et ne peut être changé durant la semaine.

- Les productivités π(mat1,prod1) et π (mat2,prod2) ainsi que les demandes sont aléatoires (*les autres productivités sont déterministe raw2/prod1 et raw1/prod2*), où :

$$\left.\begin{aligned} h_{prod1} &= 180 + \tilde{\zeta}_1, \\ h_{prod2} &= 162 + \tilde{\zeta}_2, \\ \pi(raw1, prod1) &= 2 + \tilde{\eta}_1, \\ \pi(raw2, prod2) &= 3.4 - \tilde{\eta}_2, \end{aligned}\right\}$$

Et que les réalisations des 4 V.A sont comme suit :

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &\in [-30.91, 30.91], \\ \zeta_2 &\in [-23.18, 23.18], \\ \eta_1 &\in [-0.8, 0.8], \\ \eta_2 &\in [0.0, 1.84]. \end{aligned}\right\}$$

De ce fait, on aura le programme stochastique suivant :

$$\left.\begin{array}{lrcl} \min(2x_{raw1}+3x_{raw2}) & & & \\ \text{s.t.} & x_{raw1}+ & x_{raw2} & \leq 100, \\ & (2+\tilde{\eta}_1)x_{raw1}+ & 6x_{raw2} & \geq 180+\tilde{\zeta}_1, \\ & 3x_{raw1}+(3.4-\tilde{\eta}_2)x_{raw2} & & \geq 162+\tilde{\zeta}_2, \\ & x_{raw1} & & \geq 0, \\ & & x_{raw2} & \geq 0. \end{array}\right\}$$

En fin, ce problème de décision ***n'est pas bien défini***, car ce n'est pas encore claire le sens de 'min' quand les réalisations des variables aléatoires ne sont pas connu !

Note

Géométriquement,

- Le changement dans les productivités correspond à des translations parallèles des facettes de l'ensemble des solutions admissibles.
- Le changement dans les demandes résulte en des rotations des facettes correspondantes.
- Les changements dans les productivités et les demandes résultent en une superposition de deux motions géométriques.

Question de réflexion: peut-on parler de résolution graphique dans le cas stochastique ?

Les clients considèrent que leurs demandes ***seront satisfaites durant la même semaine***. Pour cela, considérons que l'usine a établit un arrangement avec ses clients qui consiste à satisfaire les demandes des clients en cas de manque, en achetant la quantité manquante directement du marché. Cela va certainement causer des coûts supplémentaires à l'usine .

On considère les couts unitaires suivants : $q_{prod1} = 7, q_{prod2} = 12.$

Dans ce cas, l'objectif est de trouver un plan de production qui minimise la somme des **coûts du premier stage** (i.e. de production) et de l'**estimation des coûts de recours** (i.e. coût des produits achetés du marché en cas de manque).

Pour formaliser cette approche, nous résumons notre notation :

- Un seul vecteur aléatoire : $\tilde{\xi}=(\tilde{\zeta}_1,\tilde{\zeta}_2,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)^{\mathrm{T}}$
- Pour chaque contrainte stochastique on introduit une variable $y_i(\tilde{\xi})$ qui mesure le manque dans la production correspondante.

Le programme stochastique avec recours de notre exemple est le suivant :

$$\left.\begin{array}{lrcccl} \min\{2x_{raw1}+3x_{raw2}+E_{\tilde{\xi}}[7y_1(\tilde{\xi})+12y_2(\tilde{\xi})]\} & & & & & \\ \text{s.t.} & x_{raw1}+ & x_{raw2} & & & \leq 100, \\ & \alpha(\tilde{\xi})x_{raw1}+ & 6x_{raw2}+y_1(\tilde{\xi}) & & & \geq h_1(\tilde{\xi}), \\ & 3x_{raw1}+\beta(\tilde{\xi})x_{raw2} & & +y_2(\tilde{\xi}) & & \geq h_2(\tilde{\xi}), \\ & x_{raw1} & & & & \geq 0, \\ & & x_{raw2} & & & \geq 0, \\ & & & y_1(\tilde{\xi}) & & \geq 0, \\ & & & & y_2(\tilde{\xi}) & \geq 0. \end{array}\right\}$$

Où :

$$h_1(\tilde{\xi}) := h_{prod1} = 180 + \tilde{\zeta}_1,\ h_2(\tilde{\xi}) := h_{prod2} = 162 + \tilde{\zeta}_2,$$

$$\alpha(\tilde{\xi}) := \pi(raw1, prod1) = 2 + \tilde{\eta}_1,\ \beta(\tilde{\xi}) := \pi(raw2, prod2) = 3.4 - \tilde{\eta}_2:$$

2.3. Programmation stochastique linéaire avec recours

En programmation stochastique linéaire avec recours, l'idée est d'optimiser les décisions que l'on doit prendre au moment t_0 tout en tenant compte des conséquences de ces décisions pour toute réalisation des aléas qui pourrait se produire aux instants ultérieurs. Le mot "recours" révèle la possibilité dont on dispose de **remédier à une décision éventuellement trop optimiste** à l'instant t0, en mettant en œuvre des **actions correctives**, évidemment plus chères.

Le problème peut s'étendre en plusieurs étapes suivant **l'horizon d'étude**, mais dans ce qui suit nous considérerons le cas de deux étapes seulement.

2.3.1 Formulation d'un PLS en deux étapes avec recours

Le problème de référence sera le suivant :

Problème (1)

$min\ c^T x + \psi(x)$

s.c $Ax = b\ , x \geq 0$

avec $\psi(x) = E_{\xi}[Q(x, \xi)]$

et $Q(x, \xi^j) = \min\{q(\xi)^T y\}$ — Problème de seconde étape

$s.c\ W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x,\ y \geq 0\ ;$

Notez que :

A	Matrice déterministe ; A ∈ $\mathbb{R}^{m_1 \times n1}$
b	vecteur déterministe ; b ∈ $\mathbb{R}^{m_1}$
c	vecteur déterministe ; c ∈ $\mathbb{R}^{n1}$
x	Les variables x représentent les décisions de la première à étape qui doivent être prises avant que toute réalisation de la variable aléatoire ξ ne soit connue.
y	les variables y représentent les décisions, de la deuxième étape, prises une fois que les réalisation de ξ seront observées.
Fonction objectif	On cherche à minimiser sur les variables de la première étape x, mais on veille en même temps à ce que les coûts au deuxième étape, après la réalisation de la variable aléatoire ξ, soient minimaux en moyenne.

$Q(x,\xi)$	Fonction de recours qui représente le coût minimum pour corriger la décision de la première étape et satisfaire les contraintes.
$\psi(x)$	Espérance de la fonction de recours.
$q(\xi) = q + \sum_i q_i \xi_i$	Vecteur stochastique des coûts unitaires de pénalités; q(ξ) $\in \mathbb{R}^{n2}$. q, q_i : vecteurs déterministes.
W(ξ)	Matrice de recours stochastique; W$\in \mathbb{R}^{m_2 \times n2}$
$h(\xi) - T(\xi)x$ où : $h(\xi)$=$h + \sum_i h_i \xi_i$ $T(\xi)$=$T + \sum_i T_i \xi_i$	Mesure la violation des contraintes. T(ξ) $\in \mathbb{R}^{m_2 \times n1}$ h(ξ) $\in \mathbb{R}^{m2}$ h, h_i, T, T_i : déterministes.

Exemple: extraire T, W, q, A….de l'exemple de planification de production déjà présenté

2.3.2 Définitions

Définition 1 (recours fixé)

le recours est dit fixé quand W(ξ)= W (i.e déterministe donc indépendant de ξ).

Définition 2 (recours fixé complet)

Un recours fixé est complet si la matrice de recours W de dimension $m \times n$ satisfait :

$$\{t|t = Wy, y \geq 0\} = \mathbb{R}^m$$

Remarque

$$\{t|t = Wy, y > 0\} = \mathbb{R}^m \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n1}\ \forall \xi \epsilon \Xi : \text{le problème de seconde étape est faisaible.}$$

Proposition

Une matrice W de dimension $m \times n$ est une matrice de recours complet ssi

- Son rang est égale à m.
- Si on considère que les colonnes linéairement indépendantes sont les m premières colonnes W1,W2,…,Wm alors les contraintes linéaires (*) admettent une solution réalisable.

$$\begin{aligned} &Wy = 0 \\ &y_i \geq 1, i = 1,2,\dots,m \qquad (*) \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Définition 3 (recours relativement complet)

Si le problème de seconde étape est faisable pour tout $\xi \epsilon \Xi$ et au moins pour tout $x \in K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^{n_1} | Ax = b\}$ alors le problème (1) est un problème à recours relativement complet.

Remarque

Il est clair que le recours complet implique le recours relativement complet.

Définition 4(recours simple)

Le recours simple est un cas particulier du recours complet fixé où : W=(I, -I) (*I la matrice identité d'ordre m*)

Exemples

Considérons le problème de transport stochastique :

- Si on décide à la première étape d'installer des entrepôts qui ne disposent pas d'une capacité suffisante pour couvrir la demande réelle (révélée à la seconde étape) qui peut se produire suivant un scénario (pessimiste), le problème résultant devient non-réalisable, puisque on n'arrivera jamais à satisfaire la demande clientèle (le recours n'est pas relativement complet).
- Si, au contraire, on a la possibilité de recourir à d'autres actions, par exemple locations des entrepôts, supplémentaires, alors on arrivera à satisfaire la demande à un coût certes plus élevé mais fini.

2.3.3 Contraintes induites

Si la matrice W de notre problème n'est pas une matrice de recours complet, alors pour assurer la réalisabilité du problème par rapport aux variables de la première étape, il faut ajouter des contraintes **dites induites**.

Les contraintes induites sont des contraintes supplémentaires en première étape qui doivent former un ensemble qui contient toutes les solutions x de la première étape, telles que pour toute réalisation[1] de la variable aléatoire ξ, le programme en seconde étape soit réalisable, autrement :

pour tout $\xi^j, j = 1, \dots, r$ il existe y tel que $T(\xi^j)x + Wy^j = h(\xi^j), y^j \geq 0, j = 1, \dots, r$.

Si on dénote K_2 l'ensemble des contraintes induites, alors on exige que les x soient compris dans $K_1 \cap K_2$; donc on ne cherche que des solutions x qui satisfassent les contraintes induites, appartenant à K_1.

Exemple (P 43/44)

Considérons l'ensemble de faisabilité de première étape suivant :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1 - 2x_2 \geq -4, x_1 + 2x_2 \leq 8, 2x_1 - x_2 \leq 6\}.$$

Pour les contraintes de seconde étape on choisit

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(\xi) \equiv T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons le support de ξ est $\Xi=[4,19]\times[13,21]$ et que les contraintes à satisfaire pour tout $\xi \in \Xi$ sont :

$$Wy = \xi - Tx, \ y \geq 0.$$

Notons que

$$W_2 = \tfrac{1}{3}W_1 + \tfrac{2}{3}W_3$$

Alors :

$$\xi - Tx = \lambda W_1 + \mu W_3, \ \lambda, \mu \geq 0,$$

[1] Le support peut être un ensemble fini ou un polyèdre (borné) convexe

En détail :

$$\begin{aligned} \xi_1 - 2x_1 - 3x_2 &= -\lambda + 5\mu, \\ \xi_2 - 3x_1 - x_2 &= 2\lambda + 2\mu, \\ \lambda, \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

Multiplions le système par la matrice régulière

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

On aura

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 - 7x_1 - 7x_2 &= 12\mu \geq 0, \\ -2\xi_1 + 5\xi_2 - 11x_1 + x_2 &= 12\lambda \geq 0. \end{aligned}$$

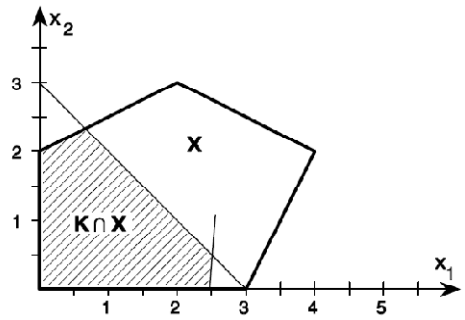
A cause de la non-négativité de μ *et* λ

$$\begin{aligned} 7x_1 + 7x_2 &\leq 2\xi_1 + \xi_2 \ (\geq 21 \ \forall \xi \in \Xi), \\ 11x_1 - x_2 &\leq -2\xi_1 + 5\xi_2 \ (\geq 27 \ \forall \xi \in \Xi). \end{aligned}$$

Comme ces contraintes doivent être satisfaites pour tout ξalors choisissons la valeur minimale pour la partie droite des inégalités, donne les contraintes induites suivantes :

$$K = \{x \mid 7x_1 + 7x_2 \leq 21, \ 11x_1 - x_2 \leq 27\}.$$

L'ensemble de faisabilité de première étape ainsi que l'ensemble de faisabilité induit sont illustrés sur la figure :



Notes

- Dans le cas de recours complet, le problème des contraintes induites n'est pas posé.
- Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ alors on doit réviser notre modèle pour s'assurer qu'il est bien conçu ou encore pour voir s'il y a d'autres possibilités de compensation qui ne sont pas encore incluse dans le modèle.

2.3.4 Propriétés de la fonction de recours

Pour un PLS-RF, $Q(x, \xi)$ est :

- Une fonction convexe linéaire par morceau en x (pour un ξ fixe)
- quand $q(\xi) = q$,une fonction convexe linéaire par morceau en ξ (pour un x fixe)

Similairement si $h(\xi) - T(\xi)x = h - Tx$ alors que $q(\xi) = q + \sum_i \ q_i \, \xi_i$ alors :

- $Q(x, \xi)$ est concave linéaire par morceau en ξ.

$\psi(x)$ est également convexe linéaire par morceau en x.

Exemple

La fonction $f(x) = |x|$ est linéaire par morceau parce que :

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

2.3.5 Modèle déterministe équivalent

Soit l'ensemble **S** qui dénote l'ensemble des réalisations possibles de ξ . S est appelé ensemble de scénarios. Considérons que **S** est fini, il est possible d'écrire le problème (1) sous forme d'un programme déterministe équivalent ayant la forme suivante :

$$\min c^T x + \sum_{s=1}^{|S|} p_s q_s^T y_s$$

$$s.t.\ Ax = b$$

$$T_s x + W_s y = r_s,\ \forall s = 1, \cdots, |S|$$

$$x \geq 0, y_s \geq 0,\ \forall s = 1, \cdots, |S|$$

Problème DE

Où :

p_s : est la probabilité d'occurrence du scénario **s**.

y_s : la décision de deuxième étape associée au scénario **s**.

q_s, h_s, T_s : sont les valeurs des vecteurs et matrices sous le scénario **s**.

Note

Si on a V variables aléatoires avec S_v valeurs possibles chacune, on obtient |S|= $\prod_{v=1}^{V} S_v$ scénarios. Par exemple, pour V=10 et S_v= 5 valeurs possibles chacune, il arrive que |S|= 5^{10}scénarios. Dans le problème DE, si A est de dimension $m_1 \times n_1$ et W est de dimension $m_2 \times n_2$ alors on aura $n_1 + n_2|S|$ variables et m_1+m_2|S| contraintes.

2.3.6 Algorithme L-Shaped pour la résolution de l'ED d'un PLS-RF

2.3.6.1 Principe général

Dans l'algorithme L-Shaped (proposé en 1969 par Van Slyke et Wets), deux classes de problèmes sont créées : le problème maître et les problèmes-esclaves.

- Les problèmes esclaves (un pour chaque scénario) reçoivent comme entrée les valeurs des variables du premier niveau et calculent les variables de recours propres à chaque scénario ainsi que le **coût associé**.
- Le problème maître comporte les variables du premier niveau et une description approximée de la fonction de recours ; il est mis initialement sous la forme :

$$min\ c^T x + \theta$$
$$sc. Ax = b$$
$$\theta \geq \psi(x)$$
$$x \geq 0$$

Le but est de construire la fonction de recours à partir des solutions proposées au fur et à mesure par le problème maître et en ajoutant des coupes déduites de la résolution des problèmes esclaves. Plus précisément :

- La résolution des problèmes esclaves nous permet de définir une borne supérieure de la fonction objectif.
- La résolution du maître nous permet de définir une borne inférieure de la fonction objectif.

Quand les deux bornes sont suffisamment proches on s'arrête et on retient la solution optimale x* correspondante.

2.3.6.2 Description de l'algorithme L-shaped

Etape0 : initialisation

K=0, LB= -∞, UB= ∞ , $\epsilon > 0$

Trouver x^0 en résolvant

$$\min c^T x$$
$$sc. Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Etape 1: Résolution des problèmes esclaves

Pour s=1,…,S

Résoudre le programme :

$$f_s^k = \min q_s^T y$$
$$sc. W_s y = h_s - T_s x^k$$

Si ce programme est infaisable pour un scénario s alors générer une contrainte (coupe) de faisabilité comme suit :

1. Trouver μ_s^k solution du :

$$\max \mu^T (h_s - T_s x^k)$$

$$sc. \mu^T W \leq 0$$

$$\|\mu\| \leq 1$$

2. calculer :

$$\alpha_k = (\mu_s^k)^T . h_s$$

$$\beta_k = (\mu_s^k)^T . T_s$$

3. Aller à l'étape 2

Sinon (si faisable pour tout les scénarios) générer une contrainte (coupe) d'optimalité comme suit :

1. Trouver π_s^k solution du programme (le dual) suivant :

$$\max \pi^T (h_s - T_s x^k)$$

$$\pi^T W_s \leq q_s^T$$

2. calculer

$$\alpha_k = \sum_{s=1}^{S} (\pi_s^k)^T . h_s . p_s$$

$$\beta_k = \sum_{s=1}^{S} (\pi_s^k)^T . T_s . p_s$$

3. Calculer la borne supérieure de la valeur objective

$V^k = c^T x^K + \sum_{s=1}^{S} p_s f_s^k$, UB=min$\{V^k, UB\}$

Si UB mise à jour alors $x^* \leftarrow x^k$

Etape 2: Ajouter une coupe au problème maitre est le résoudre

1. Si un sous problème infaisable, ajouter ${\beta_k}^T x \geq \alpha_k$

   Sinon ajouter ${\beta_k}^T x + \theta \geq \alpha_k$

2. Résoudre le problème maitre pour trouver une solution (x^{K+1}, θ^{K+1}) et la valeur objective optimale V^{k+1} :

$$V^{k+1} = min\, c^T x + \theta$$
$$sc. Ax = b$$
$${\beta_t}^T x + \theta \geq \alpha_t, t \in I_k$$
$${\beta_t}^T x \geq \alpha_t, t \notin I_k$$
$$x \geq 0$$

I_k est l'ensemble des indices d'itération où les contraintes d'optimalité ont été générées.

3. LB=max$\{V^{k+1}$, LB$\}$

Etape 3: Test d'arrêt

Si UB-LB$\leq \epsilon|UB|$ alors

Stop et retenir x^* correspondant à UB

Sinon

k$\leftarrow K + 1$

Retour à l'étape 1.

Remarques

1/ l'étape 1 de l'algorithme L-Shaped peut être simplifiée si :

- On connait que le recours est complet ou au moins relativement complet.

- On peut définir directement des contraintes induites (voir l'exemple du cours précédent).

2/ si on considère le vecteur $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]$sur $\mathbf{K}^n$,

- la **norme euclidienne** est donnée par

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

- la **norme 1** est donnée par

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Pratiquement, on choisit la norme 1 pour rester dans le cas linéaire (puisque la norme euclidienne engendre des contraintes quadratiques).

Notes sur la génération de coupes de faisabilité par l'algorithme L-Shaped

Comment tester la faisabilité du programme (*) suivant?

$$\mathrm{f}_s^{\mathrm{k}} = \min q_s^T\, y$$
$$sc.\, W_s y = h_s - T_s\, x^k$$

Il faut résoudre

$$\min v$$
$$sc.\, Wy + Iv = h_s - T_s\, x^k$$
$$y, v \geq 0$$

Si v*=0 alors le problème (*) est faisable parce que on aura par substitution que $Wy = h_s - T_s\, x^k$ (i.e contrainte satisfaite).

Sinon (v*>0)
Trouver μ_s^k solution du :

$$\max \mu^T \left(h_s - T_s\, x^k\right)$$

$$sc.\, \mu^T W \leq 0$$

$$\|\mu\|_1 \leq 1$$

μ est de signe libre

Si on remplace μ par $\mu_1 - \mu_2$ tel que $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ on doit résoudre :

$$\max(\mu_1 - \mu_2)^T \left(h_s - T_s\, x^k\right)$$

$$sc.\, (\mu_1 - \mu_2)^T W \leq 0$$

$$e^T(\mu_1 + \mu_2) \leq 1$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Où, $e = (1, \ldots, 1)^T$; le nombre de ses composants = nombre de lignes dans W.

2.3.7 L'algorithme L-Shaped Multi-Coupes

L'inconvénient de L-Shaped est la perte d'information à cause de l'agrégation des coupes dans l'étape 2. Alors, afin d'améliorer l'efficacité de l'algorithme L-Shaped, la version Multi-Coupes a été proposé (en 1988 par Birge et Louveaux) dans le but de minimiser le nombre d'itérations. Le principe est le suivant :
Au lieu d'ajouter une seule coupe au problème maitre à chaque itération, la méthode Multi-Coupes ajoute toutes les coupes obtenues à chaque itération. Cela permet d'utiliser toute l'information obtenue à partir des problèmes esclaves ce qui assure une approximation plus rapide de la fonction objective.

Le problème à résoudre aura la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&min\, c^T x + \sum_{s=1}^{|S|} \theta_s \\
&sc.\, Ax = b \\
&{\beta_{ts}}^T x + \theta_s \geq \alpha_{ts}, t \in I_k, s = 1, \dots, |S| \\
&{\beta_t}^T x \geq \alpha_t, t \notin I_k \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Inconvénient
Taille importante du problème maitre (une variable est introduite pour chaque sous problème/scénarios).
Remarque
Afin de trouver un compromis entre les avantages et les inconvénients des deux méthodes précédentes, une agrégation partielle des coupes est envisageable.

Références conseillées

[1] Peter Kall and Stein W. Wallace, Stochastic Programming, John Wiley & Sons, Chichester, 1994"
[2] J. R. Birge and F. V. Louveaux. Introduction to Stochastic Programming. Springer-Verlag, New York, 1997.