Les nombres entiers.

Cours PE1 - 30 août 2010

Cours de David Rolland, formateur en mathématiques

Plan du cours

- ***I- Les nombres naturels***
- ***II- Les nombres entiers***
- ***III- Les systèmes de numération***
- ***IV- Didactique : repères pour l’enseignement***

1- Les nombres naturels

A/ Caractérisation

- Les premiers nombres rencontrés dans la scolarité sont les **nombres entiers positifs**, appelés aussi nombres « **naturels** » car ce sont aussi les nombres qui ont été utilisés par les premiers hommes qui ont su compter.
- Ils paraissent être les plus simples et les plus évidents…
- Ils servent à dénombrer des quantités dites **discrètes**, c'est-à-dire dans lesquelles on décèle des entités séparées et qu'on peut isoler en unités, à la différence des quantités **continues** qui sont des quantités pour lesquelles il est difficile a priori d'y déceler une unité première.
- C'est le cas d'un verre d'eau. Comment le quantifier ? C'est plus difficile que de quantifier un verre de billes…
- Une quantité discrète s'appelle une ***collection.***

- Pour dénombrer, il faut posséder une **suite ordonnée de mots** associés à des **symboles**.
- La suite numérique appelée aussi **comptine** est ainsi constituée de mots qu'on apprend à dire dans l'ordre dès son plus jeune âge :

  un, deux, trois… ou bien

  one, two, three… ou encore

  hoe, piti, toru, maha, pae…
- Ces mots prononcés oralement sont appelés des **mots-nombres**.

<u>La règle du dernier mot-nombre prononcé</u>

- Pour dénombrer, on récite la suite numérique et on associe le geste à la parole en synchronisant les deux.
- Si on s'arrête sur « cinq », il suffit de retenir ce dernier mot qui sous-entend tous les précédents. On dit alors qu'il y a cinq objets.
- C'est ce qu'on doit apprendre en maternelle et certains enfants rejouent quelquefois ce dialogue :

  « M : combien il y en a ?

  E : il y en a un, deux, trois, quatre, cinq…

  M : Alors combien il y en a ?

  E : et bien, il y en a un deux trois quatre cinq… »
- Cette suite numérique définit d'emblée <u>deux aspects du nombre.</u>

  Il est à la fois **cardinal** (dans le cas de collections finies, le cardinal est synonyme du nombre d'éléments) et **ordinal** (il repère la place d'un objet dans une suite).

Le nombre entier naturel, sous son aspect ordinal, est alors considéré comme élément d’une suite organisée qui possède les propriétés suivantes :

- chaque élément a un **successeur** unique appartenant à cet ensemble (le successeur de *n* peut être noté *n*+1) ;

- 2 éléments différents ont des successeurs différents ;

- 0, appartenant à cet ensemble, n’est le successeur d’aucun nombre ;

- toute partie de cet ensemble vérifiant ces propriétés et contenant 0 est égale à cet ensemble.

L’ensemble des nombres entiers naturels est noté {0, 1, 2, …, n, n+1, …} ou plus simplement N.

B/ Propriétés.

Propriété 1 : l’ensemble N est ordonné par une relation qui lui permet de comparer les nombres :

a et b étant deux entiers naturels, a ≤ b si et seulement s’il existe un entier naturel c, tel que b = a + c

Cet ordre correspond :

- **du point de vue cardinal**, au fait que l’ensemble A (de cardinal a) a moins d’éléments que l’ensemble B (de cardinal b) ;

- **du point de vue ordinal**, au fait que « a est placé avant b dans la suite des nombres ».

Propriété 2 : cet ordre est compatible avec l'addition et la multiplication par un naturel non nul :

$$\mathbf{a \geq b \text{ équivaut à } a + c \geq b + c \text{ et,}}$$

$$\mathbf{\text{si } c \neq 0,\ a \geq b \text{ équivaut à } a \times c \geq b \times c}$$

Propriété 3 :
L'ordre est total : tous les nombres entiers naturels peuvent être comparés deux à deux avec cette relation.

Propriété 4 : N est un ensemble infini

Tout entier naturel est suivi d'au moins un autre entier naturel, et donc d'une infinité d'entiers naturels.

Cette idée d'infini présente de nombreuses difficultés. Par exemple, on peut affirmer qu'il y a « autant » de nombres entiers naturels pairs que de nombres entiers naturels (pairs et impairs) !

En effet, on peut mettre en correspondance terme à terme les éléments de N et ceux de l'ensemble des nombres pairs :

0	1	2	3	…	n	…
↓	↓	↓	↓		↓	
0	2	4	6	…	$2n$	…

De même, l'ensemble des multiples de n'importe quel entier naturel non nul peut être mis en bijection avec N.

C/ Les insuffisances de l'ensemble N.

- Dans N, la soustraction n'est pas toujours possible : $x = b - a$ n'a de solution dans N que si $a \geq b$.

- Par exemple , 5 – 8 n'existe pas dans N.

- De plus, les nombres naturels ne permettant de graduer qu'une demi-droite, il reste des points de la droite qui ne sont pas repérés.

II- L’ensemble Z des nombres entiers relatifs.

Les entiers relatifs permettent de pallier en partie les insuffisances des entiers naturels.

En effet, les entiers relatifs permettent de graduer la droite toute entière (même s’ils ne permettent pas d’en repérer tous les points) et l’équation $x = a - b$ a toujours une solution dans cet ensemble.

Par exemple, 5 – 8 existe dans Z, il est égal à -3.

A/. Caractérisation.

L’ensemble des nombres entiers relatifs complète l’ensemble des nombres entiers naturels.

Cet ensemble, noté **Z**, est composé des entiers naturels et leurs opposés :

{…, -n, …, -2, -1, 0, 1, 2,…, n, …}.

O est à la fois négatif et positif.

L’ensemble des nombres entiers relatifs différents de 0 est noté Z^*.

L’ensemble des nombres entiers relatifs positifs est noté Z^+.

L’ensemble des nombres entiers relatifs négatifs est noté Z^-.

B/. Propriétés.

- Le nombre 0 est à la fois positif et négatif.
- 5 et -5 sont deux nombres opposés, leur somme est 0.
- 3 - 5 est un nombre de Z et s'écrit -2.
- On en déduit que : $Z^+ = N$
- Tous les entiers naturels appartiennent à Z. On écrit : $N \subset Z$.
- L'ensemble Z est totalement ordonné et permet de graduer la droite numérique.

Si x est un entier relatif, un seul des éléments de $\{ x, -x\}$ est un entier naturel : il est appelé « **valeur absolue de x** » et noté $|x|$.

De sa définition, il résulte que :

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$

et

$$|x| = -x \quad \text{si } x \leq 0.$$

Les nombres entiers relatifs peuvent être représentés sur une droite numérique, et deux nombres relatifs opposés sont symétriques par rapport à l'origine.

Règles de comparaison de deux entiers relatifs :

- Si 2 nombres entiers relatifs sont positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.

- Si 2 nombres entiers sont de signes opposés, le nombre positif est le plus grand

  (exemple : 2 > -5).

- Si 2 nombres entiers sont négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue

  (exemple : -1 > -3).

L'ordre dans Z prolonge l'ordre défini dans N :

- Il est compatible avec l'addition et la multiplication par un entier strictement positif.

Si $c > 0$, $a \leq b$ **est équivalent à** $a \times c \leq b \times c$.

Attention :

si $c < 0$, $a \leq b$ **est équivalent à** $a \times c \geq b \times c$.

D'autre part, **si** $a \leq b$ **et** $c \leq d$ ***alors*** $a + c \leq b + d$.

Exemples :

$-7 < -3$ donc $2\times(-7) < 2\times(-3)$ et donc $-14 < -6$.

$-7 < -3$ donc $(-5)\times(-7) > (-5)\times(-3)$ et donc $35 > 15$.

Mais, contrairement à ce qui se passe avec l'ensemble N où 0 est le plus petit entier naturel, il n'existe pas de plus petit entier relatif.

Z est aussi un ensemble infini.

C/. <u>**Les insuffisances de Z :**</u>

- **Certaines équations de la forme a x c = b n'ont pas de solution dans Z,** comme par exemple 2 x c = 5.

- **Les nombres entiers relatifs, sauf 1 et -1, n'ont pas d'inverse pour la multiplication** : l'inverse de 3, c'est-à-dire le nombre y tel que 3 x y = 1 n'est pas un nombre relatif.

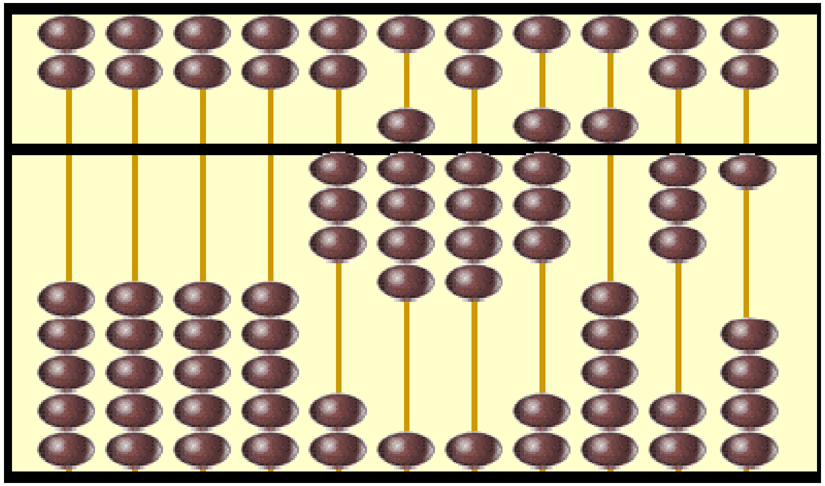
- Il existe de nombreux points de la droite qui ne sont pas repérés par un entier relatif (il y a beaucoup de trous). **D'autres ensembles de nombres sont donc nécessaires.**

III- les systèmes de numération

A. Les numérations figurées

Pour représenter des nombres, les diverses sociétés ont utilisé divers objets naturels ou fabriqués :

- entailles dans des os ou pierres,
- puis utilisation de cailloux,
- de nœuds sur une cordelette,
- de jetons,
- de marques sur le sol,
- de boules mobiles coulissant sur des tiges (bouliers)…



- De nombreuses techniques de calcul ont vu le jour et se sont perfectionnés à partir de systèmes figurés. Mais ces procédés de calculs ne sont que des calculs de l'instant dont on ne peut garder trace.

- Les progrès dans le calcul ont été largement déterminés par l'invention des numérations écrites et de manière plus large par celles des écritures mathématiques dont on a pu conserver la trace (importance de l'invention du papier au II^{e} siècle par les chinois)

B. Les numérations orales.

- L'un des premiers principes a été celui de la répétition.
- Par exemple, voici un système élémentaire que l'on retrouve chez certains Pygmées d'Afrique :

1	2	3	4	5	6
a	oa	ua	oa-oa	oa-ua	ua-ua

C. Les numérations écrites

- Le choix d’un nombre limité de symboles et le choix d’une ou plusieurs bases de numération sont au fondement de chaque système de numération : ces choix sont plus ou moins indépendant.
- Nous étudions ci-après les principaux systèmes écrits de numération qui ont précédé le système de numération indienne de position qui s’est universellement imposé aujourd’hui.

1/ Le principe d’une base de numération.

Ce principe consiste **à compter par paquets** contenant un nombre fixé d’éléments et à désigner par un symbole écrit ou un assemblage de symbole, ce nombre d’éléments.

Puis on forme des paquets de paquets, et ainsi de suite.

Ce principe est une réponse au problème de l’**énumération** des éléments d’une collection : ne pas oublier d’éléments, ne pas les compter deux fois, les réorganiser pour en rendre compte de manière plus intelligible.

<u>Exemple</u> :

Dans un système de **numération décimale**, on regroupe d’abord les éléments par 10 : la nouvelle unité d’ordre supérieure, la **<u>dizaine</u>**.

Et ainsi de suite, on obtient des unités de différents ordres, dont la caractéristique est qu’une unité d’un certain ordre contient 10 unités de l’ordre immédiatement inférieur.

Unité simple	1	10^0
Dizaine	10x1	10^1
Centaine	10x10	10^2
Millier	10x10x10	10^3
Dizaine de mille	10x10x10x10	10^4

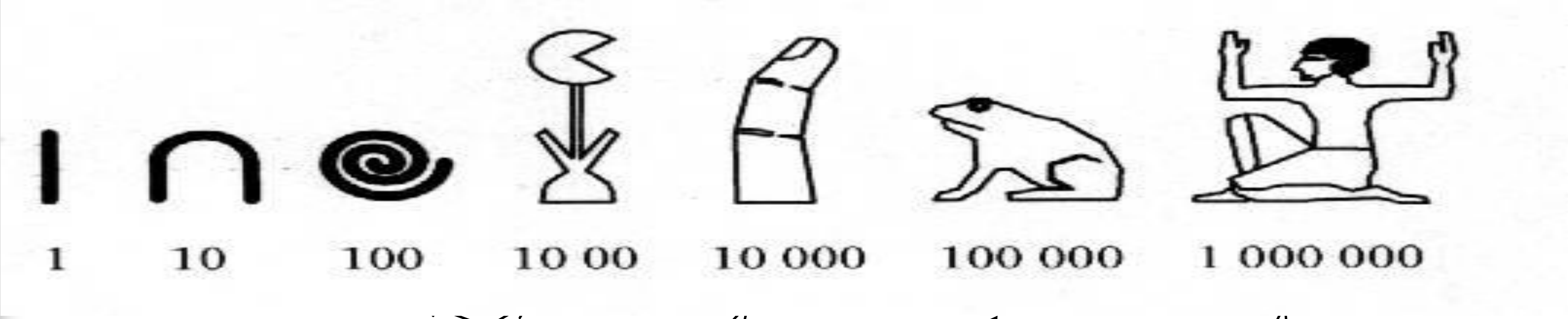
L'histoire des systèmes de numération montre que les bases les plus fréquemment utilisées ont été :

- la base décimale
- la base sexagécimale (soixante)
- la base vicésimale (20)
- la base duodécimale (douze)
- la base quinaire (les 5 doigts de la main)
- la base binaire

2/ **Les systèmes de numération de type additif**

a/ La numération égyptienne.

- Le système de numération écrite, utilisé par les Egyptiens (fin du 4e millénaire avant JC), permettait la représentation des nombres entiers pouvant dépasser le million.
- Ils utilisaient les symboles suivants :



le clou   l'anse de panier   le rouleau de papyrus

La fleur de lotus   le doigt   le têtard   le dieu agenouillé

On dit qu'il s'agit aussi d'un **système de numération décimale** car il y a **un signe pour chaque puissance de 10.**

Chaque signe est écrit au maximum 9 fois.

Pour trouver la valeur du nombre, il suffit d'ajouter les valeurs représentées par chaque signe.

L'ordre d'écriture des signes n'a pas d'importance du point de vue numérique

Pour écrire 1 000 000 un seul signe suffit alors qu'il faut 10 signes pour écrire 109.

Ce système de numération est un **système décimal additif**.

Comparaison du système de numération égyptienne avec notre système actuelle.

Notre système décimal de position	Le système décimal additif égyptien
10 signes sont suffisants pour écrire tous les nombres entiers.	Pour chaque nouvelle « puissance de 10 » un nouveau signe est créé : il faudrait donc une infinité de signes pour coder tous les nombres entiers.
La valeur d'un chiffre dépend de sa position.	La valeur de chaque signe est fixe.
Le zéro indique une absence de quantité « associée » à une puissance de 10.	Il n'y a pas de signe pour la quantité « zéro » et ce n'est pas nécessaire.
Plus le nombre de chiffres est important, plus le nombre entier est grand.	Le nombre de signes ne donne aucune indication sur la taille du nombre.

b/ La numération romaine.

C’est un système additif, qui ne possède pas de zéro, il est composé de symboles non alphabétiques.

La numération romaine permettait d’écrire les neufs premiers chiffres ainsi :

I II III IV V VI VII VIII IX

Sept symboles numériques permettent d’écrire les nombres jusqu’à 1000.

Numération décimale	1	5	10	50	100	500	1000
Numération romaine	I	V	X	L	C	D	M

Deux règles régissent l'agencement des symboles :

- on ne peut répéter plus de trois fois le même symbole;
- lorsqu'un symbole inférieur précède un symbole supérieur, on retire le plus petit nombre au plus grand.

Exemples : XL ⇨ 40 (50 – 10)

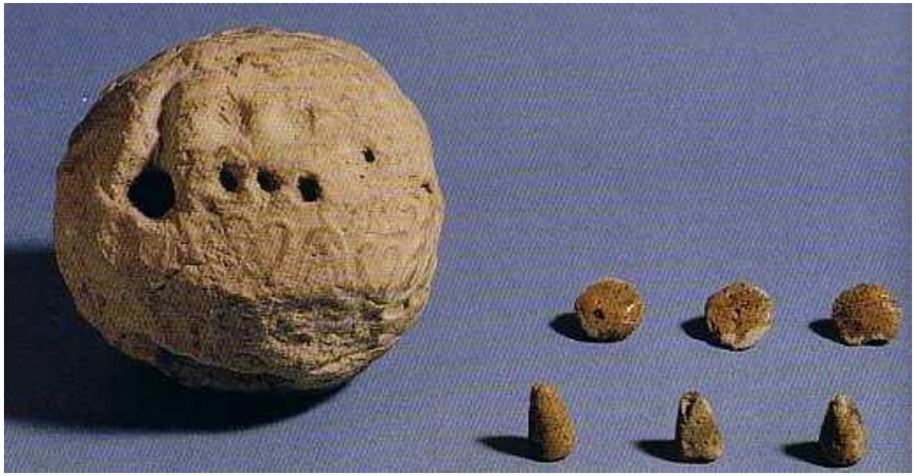
CD ⇨ 400 (500 – 100)

CM ⇨ 900 (1000-100)

3/ ***Les systèmes de numération de type positionnel***

a/ La numération babylonienne.

En 3500 avant Jésus Christ, en Mésopotamie, on utilise des petits jetons de terres cuites de formes et de tailles différentes. Ces jetons sont emprisonnés dans une boule creuse en argile qui permet de vérifier les transactions commerciales, on leur donnera le nom de **calculi.**



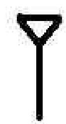
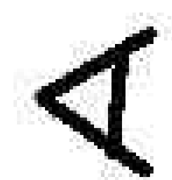
Ces cailloux constituent l'un des premiers systèmes de numération


Europe
Asia
Thrace
Lydia
Carchemish
Tigris
Media
Megiddo
Euphrates
Susa
Kittim
Africa
Jerusalem
Persia
Babylon
Routes
Hebrew Captives 605
Hebrew Captives (586)
Desert Route (Death of Father 605)
Dumah
Tema
Dedan
Egypt
Arabia
Tigris
Euphrates
Baghdad
Plain of Dura
Tower of Babel
Golden Image
Babylon
Babylon: Center of Idolatry
N
W
E
S
© Teachinghearts.org

En Mésopotamie, les Sumériens ont inventé l'écriture.

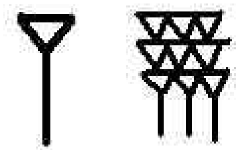
Cette écriture formée de signes en forme de coin est appelée <u>cunéiforme</u>.

Les Sumériens ont représentés les nombres par 2 symboles :

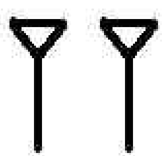
- le clou (1) 
- le chevron (10) 

- **Tablette de calcul babylonienne**
- Tablette en argile couverte de symboles mathématiques rédigés en cunéiforme.
Tablette babylonienne. Argile. Musée de Bagdad (Irak).

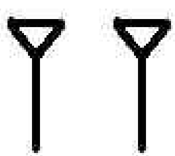
- Au-delà de 59, l’écriture devenait positionnelle.
- Par exemple, le nombre 69 s’écrivait :



- Inconvénient : comment différencier par exemple 2 et 61 ?



1+1

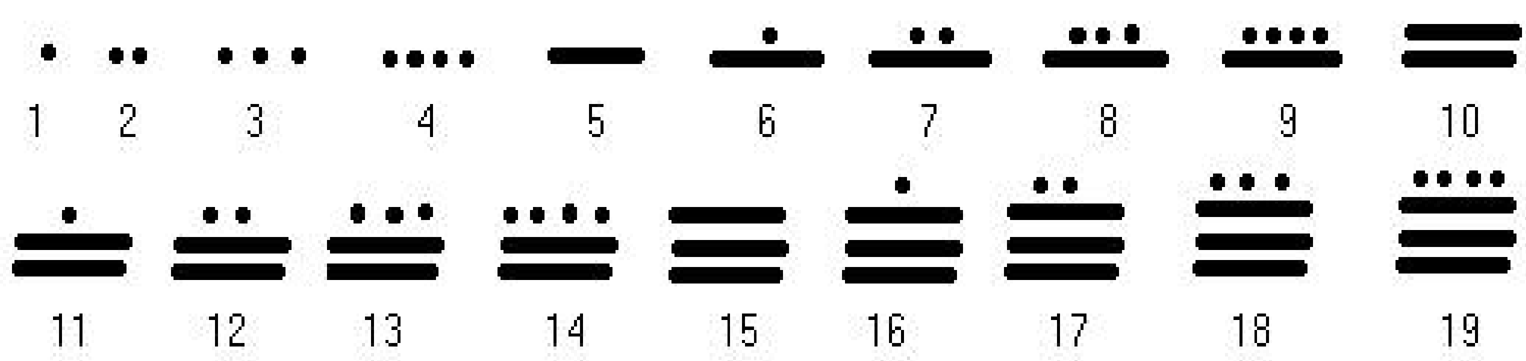


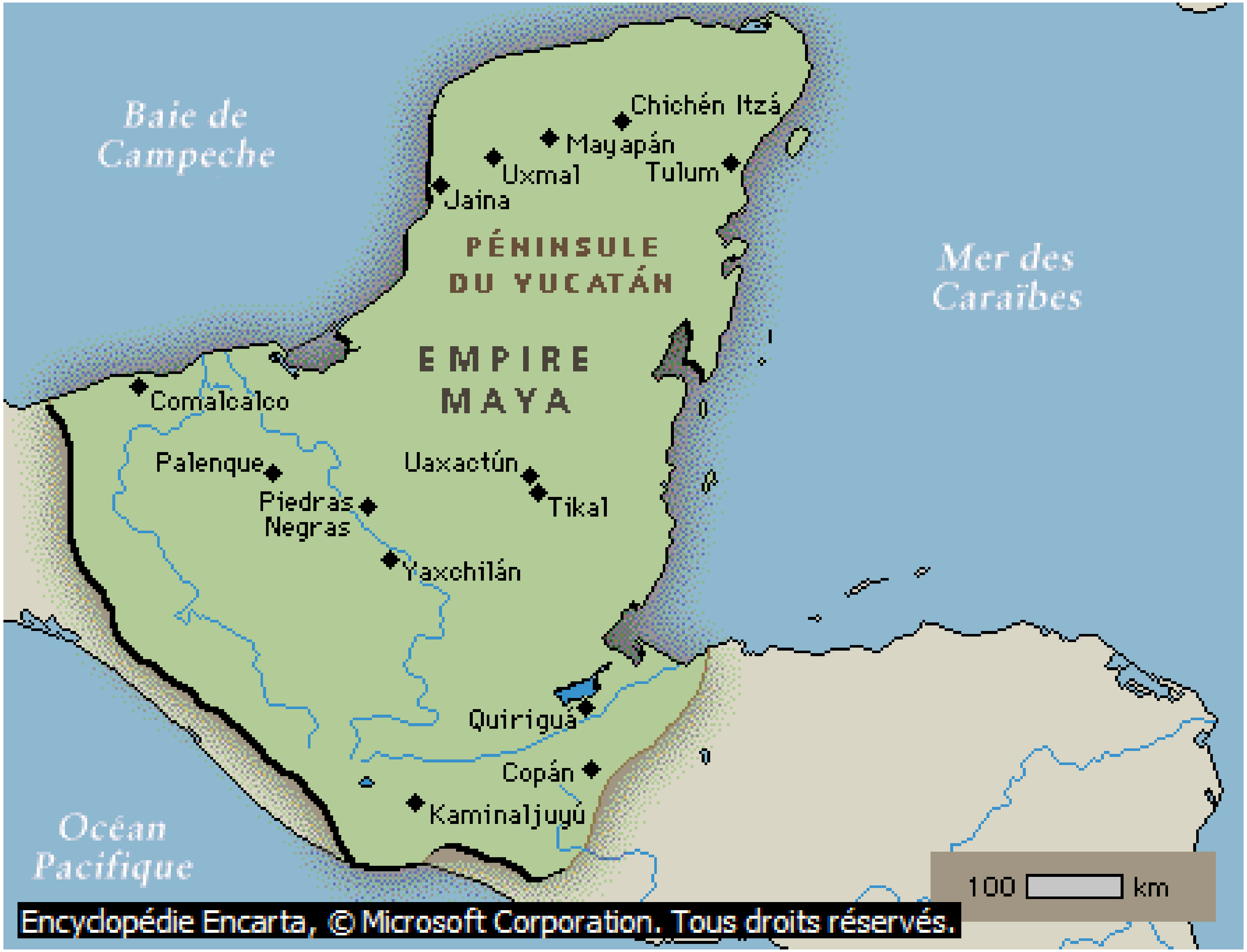
1x60 + 1

b/ La numération maya.

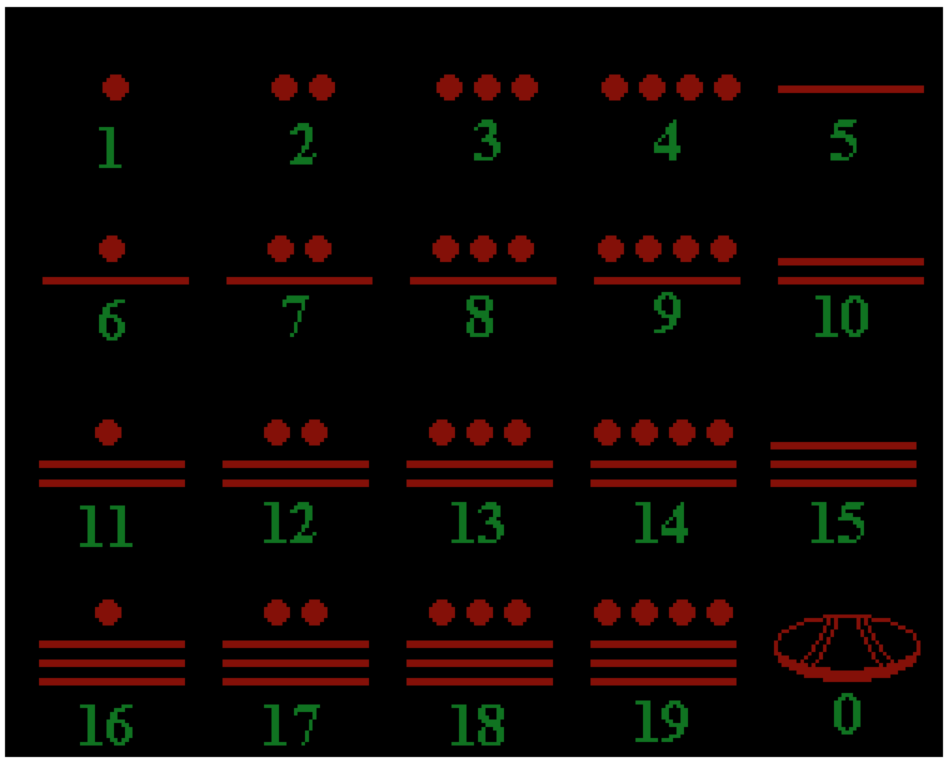
Les savants astronomes mayas mirent au point au cours du 1er millénaire de notre ère une numération de position en base vicésimale (base 20).

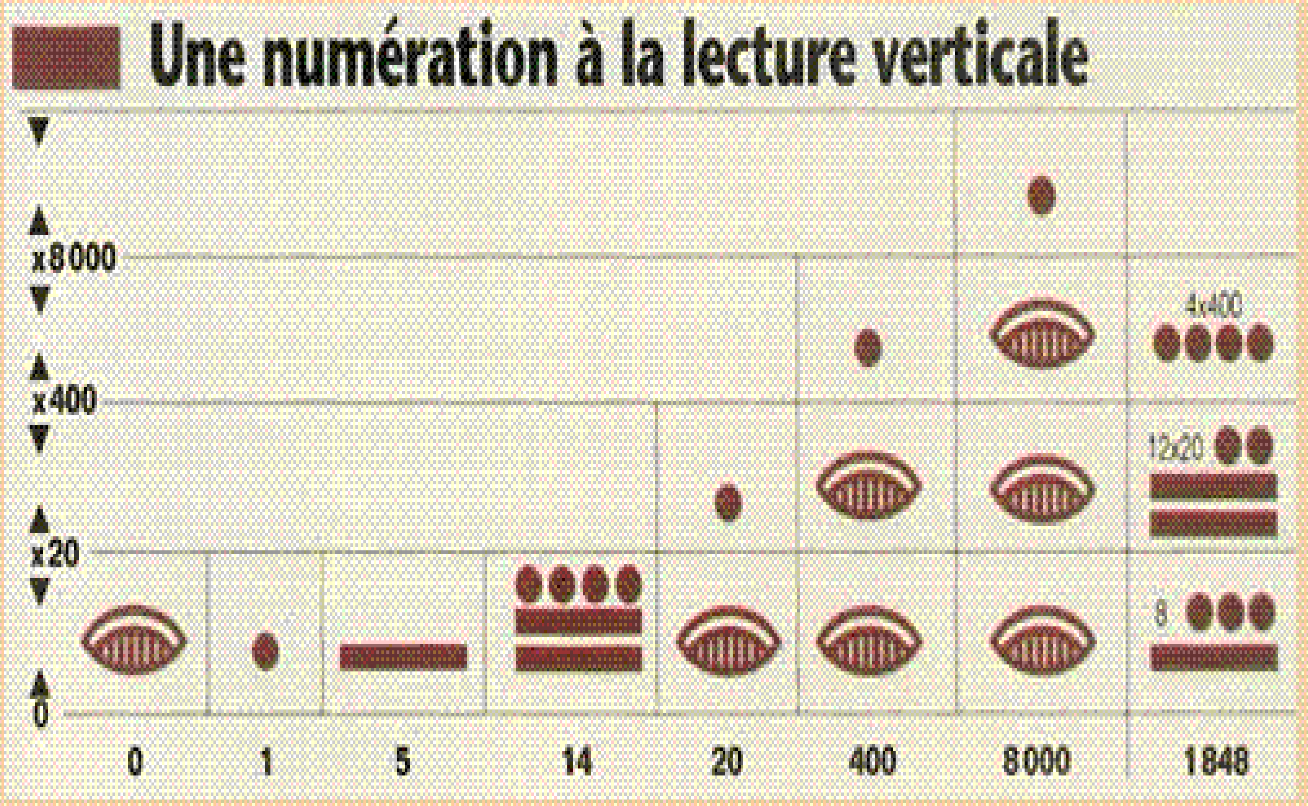
Les nombres sont représentés par des assemblages de points et de traits suivant une disposition verticale.




Baie de Campeche
Chichén Itzá
Mayapán
Uxmal
Tulum
Jaina
PÉNINSULE DU YUCATÁN
Mer des Caraïbes
EMPIRE MAYA
Comalcalco
Palenque
Uaxactún
Tikal
Piedras Negras
Yaxchilán
Quiriguá
Copán
Kaminaljuyú
Océan Pacifique
100 km

Un signe graphique particulier, un ovale horizontale figurant une coquille d'escargot, un glyphe, joue le rôle de signe séparateur permettant une écriture des nombres sans ambiguïté.

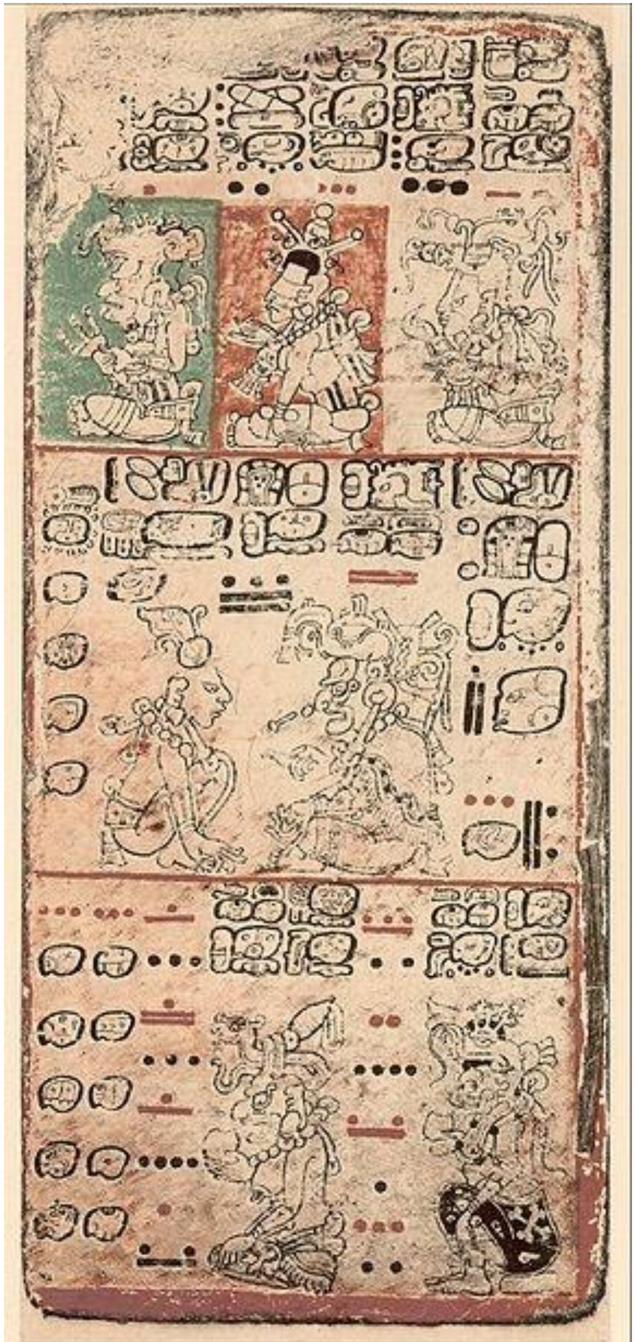




Dans la numération maya, trois symboles (le point, le trait, la coquille) suffisent à écrire tous les nombres, car la position du chiffre lui confère sa valeur. En effet, dans ce système qui utilise la base 20, les chiffres se superposent, sur plusieurs niveaux (20, 400,8000..), et se lisent de bas en haut.

Le zéro, symbolisé par une coquille, marque le vide.

Calendrier maya sur le Codex Dresden, l'un des rares à avoir survécu à la conquête espagnole



c/ La numération actuelle

Notre système de numération chiffrée est un **système décimal de position**, ce qui signifie :

- **On utilise 10 chiffres** (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9)
- **Chaque chiffre représente une valeur différente selon la position qu'il occupe.**
- **Attention à ne pas confondre chiffre et nombre (un nombre entier naturel s'écrit avec des chiffres)**.

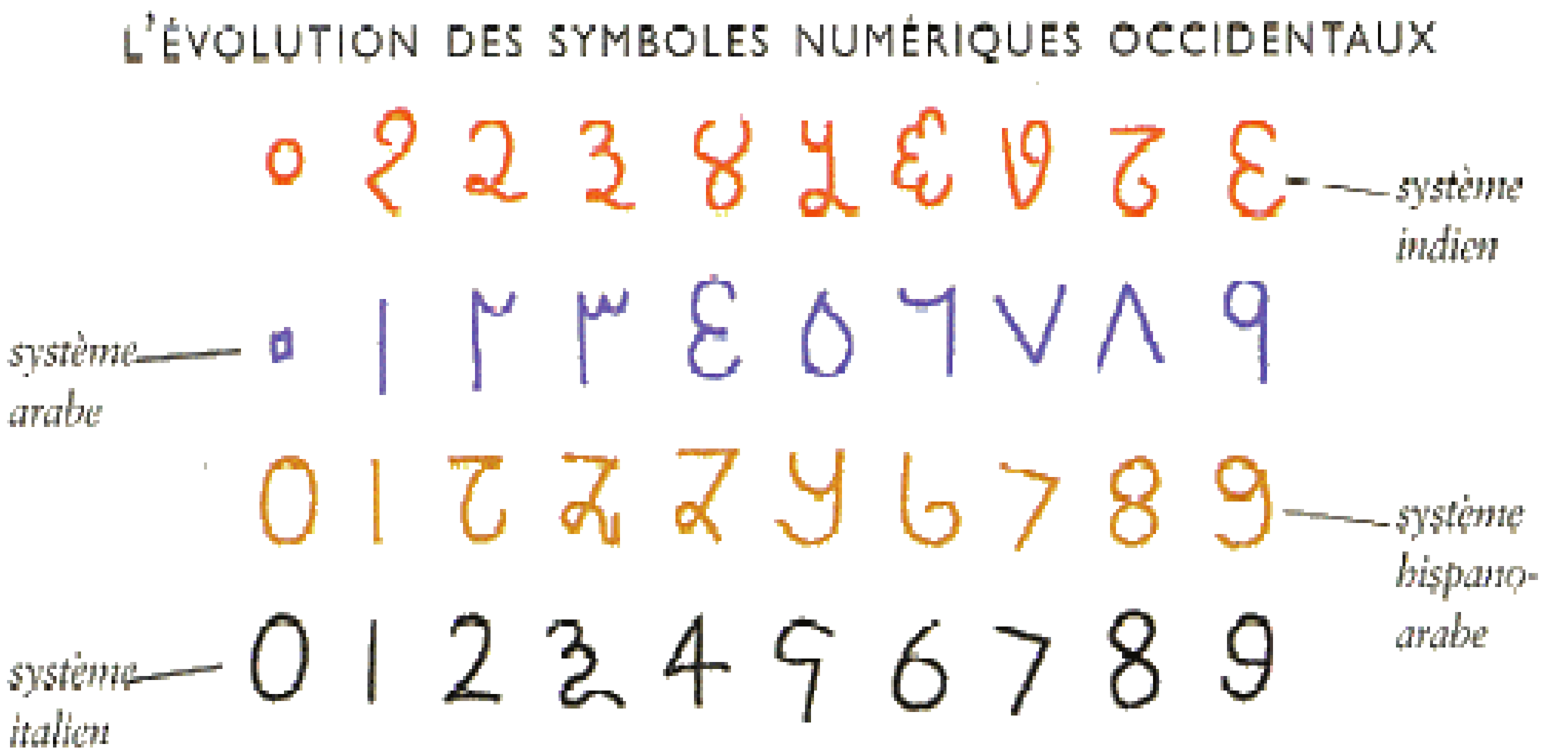
Par exemple :

$\underline{mcdu} = m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + u \times 1$

$= 1000m + 100c + 10d + u = m \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + u$

u = chiffre des **unités**
d = chiffre des **dizaines**
c = chiffre des **centaines**
m = chiffres des **unités de mille** ou **milliers**

Evolution des écritures des chiffres :



d/ En conclusion :

Pour être efficace et sans ambiguïté, une numération de position doit permettre l'écriture des nombres à l'aide d'une suite de chiffres, ce qui nécessite 2 principes complémentaires :

- Le nombre de signes différents doit être égal à la base.

- Un des signes a pour fonction de signaler l'absence de groupement d'une certaine unité :

le zéro.

Généralisation à une base b :

Si b est la base choisie, les groupements successifs se font par b éléments; chaque groupement « apporte » donc au nombre en question une puissance de b correspondant à son rang.

Le nombre qui s'écrit dans la base b :

$\overline{a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots a_2\ a_1\ a_0}$

est égal à :

$a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + a_{n-2} \times b^{n-2} + \ldots a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_0$

L’étude de bases autre que dix permet de mieux comprendre notre propre système et, peut-être, nous aide à concevoir les difficultés rencontrées par les élèves en cours d’apprentissage.

IV. Repères pour l'enseignement

- Quels programmes prendre en compte ?

- 2006 Polynésie Française, adaptés de 2002 métropole

- 2008 métropole

- **1/ Les nombres en maternelle et en début de CP**
- **De nombreuses études montrent que, très jeunes, les enfants ont le sens de la quantité, ce qui se traduit principalement par 3 grandes habiletés :**
  - **La discrimination des collections en fonction de leur taille**
  - **L'appariement de collections selon leur taille**
  - **La manipulation des quantités (augmentation, notamment)**

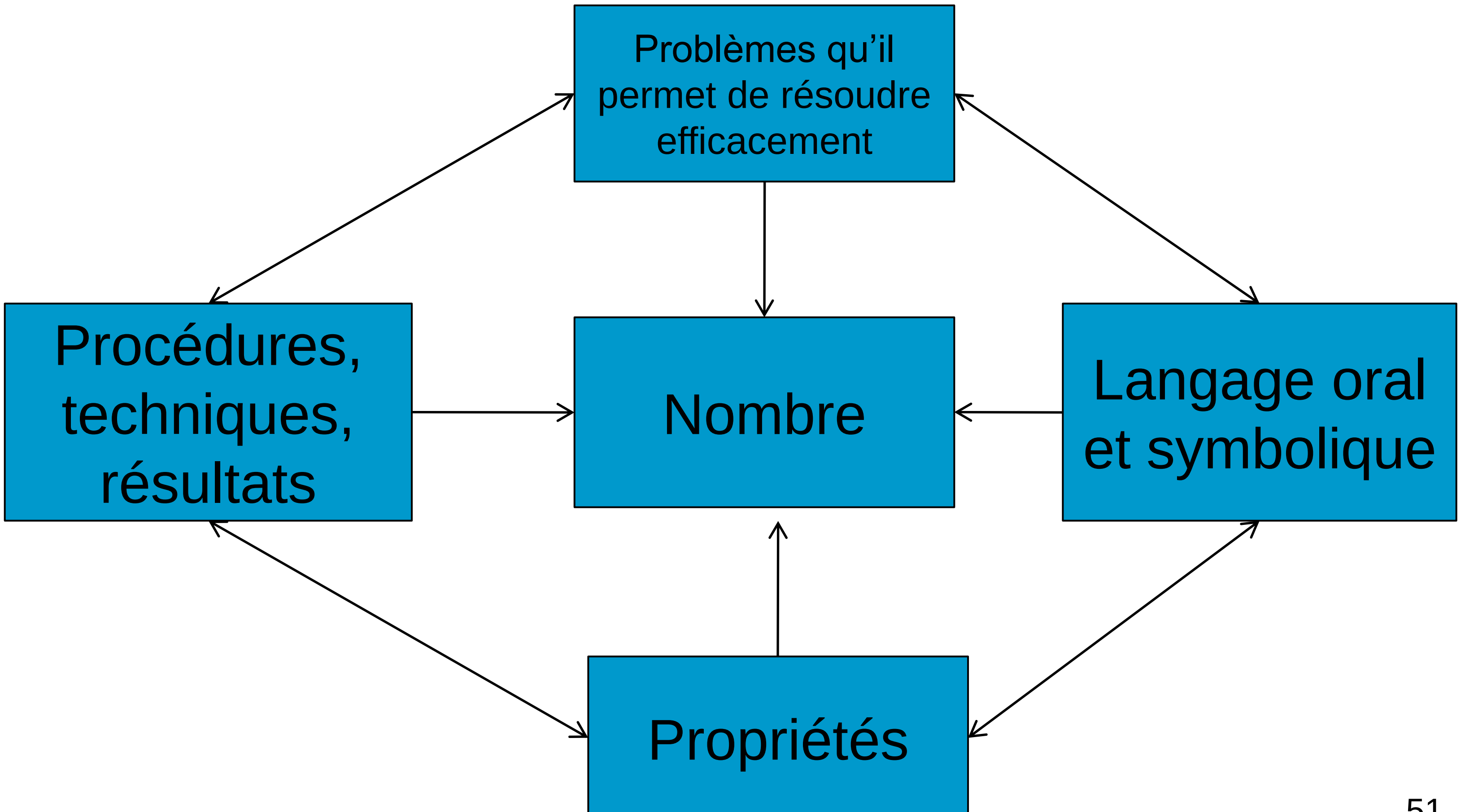
Entre 2 et 6 ans, les enfants acquièrent **la comptine orale** *(un, deux, trois, quatre…)* des nombres et deviennent capables de l'utiliser pour résoudre différents types de problèmes :

- **dénombrement** (réponse à la question : « combien ? »),
- **augmentation ou diminution de quantités**…

Il ne faut cependant pas se méprendre : ce n'est pas parce-que l'enfant utilise très tôt des noms de nombres que celui-ci les relie à l'idée de quantité.

La question de la responsabilité de l'école dans le premier apprentissage des nombres est donc posée, en particulier à l'école maternelle et en début de CP.

Si on se réfère du point de vue de G. Vergnaud, voici le schéma nécessaire pour faire acquérir le concept de nombre :



A quoi servent les nombres ?

On peut mettre en évidence 4 grandes classes d'usage des nombres.

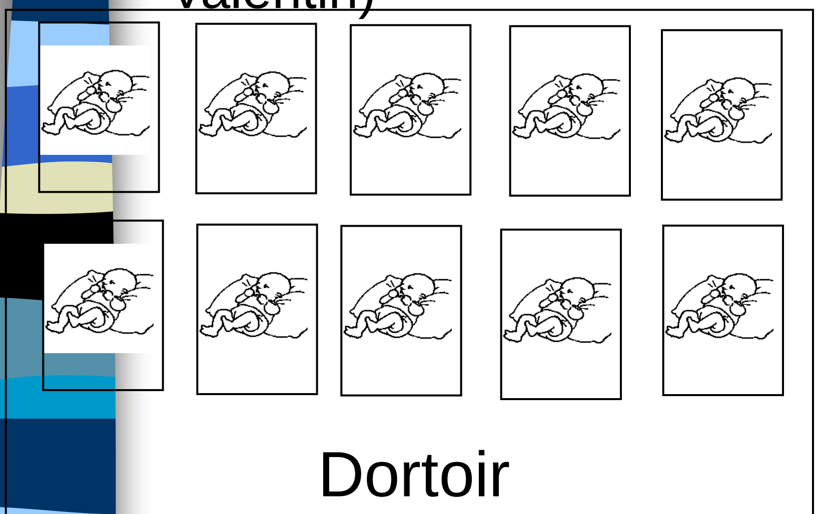
	Aspect cardinal : les nombres pour exprimer la quantité	Aspect ordinal : les nombres pour repérer des positions dans une liste rangée
Mémoriser	Les nombres pour garder la mémoire d'une quantité en vue de la reproduire, de la communiquer, de la compléter, de la comparer…	Les nombres pour garder la mémoire d'une position en vue de la retrouver, de la communiquer
Anticiper le résultat d'actions	Les nombres utilisés pour connaître, à l'avance, le résultat d'une augmentation, d'une diminution, d'un partage ou pour retrouver une quantité avant qu'elle ne subisse une transformation…	Les nombres utilisés pour connaître, à l'avance, le résultat d'un déplacement dans une liste d'objets rangés ou pour retrouver la position d'un objet avant qu'il ne subisse un déplacement…

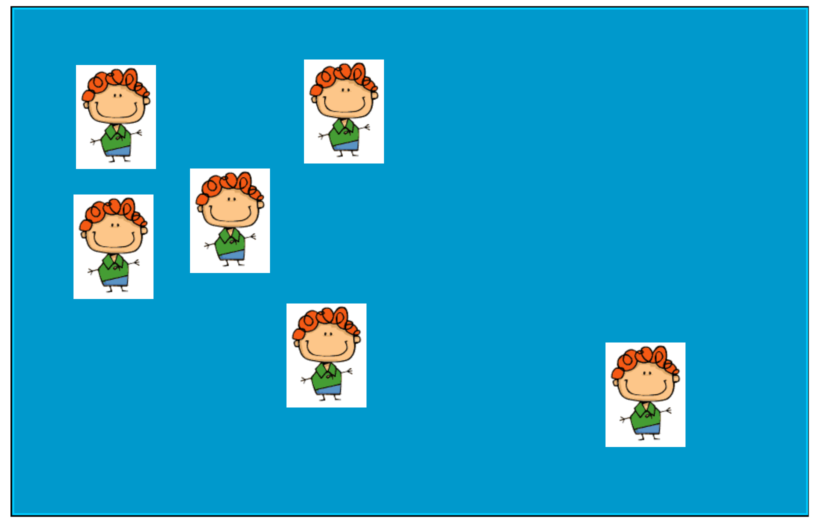
De façon générale qu'est-il important de faire comprendre aux élèves concernant le nombre ?

a) Faire comprendre que les nombres sont utiles pour résoudre des problèmes (ayant du sens pour l'élève …)

Exemples (GS)

Premier exemple (inspiré d'une proposition de Dominique Valentin)





Combien de bébés ont fini leur sieste et sont dans la salle de jeux ?

Deuxième exemple :

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14 ○	○	○	○	○	○	○
 ○						

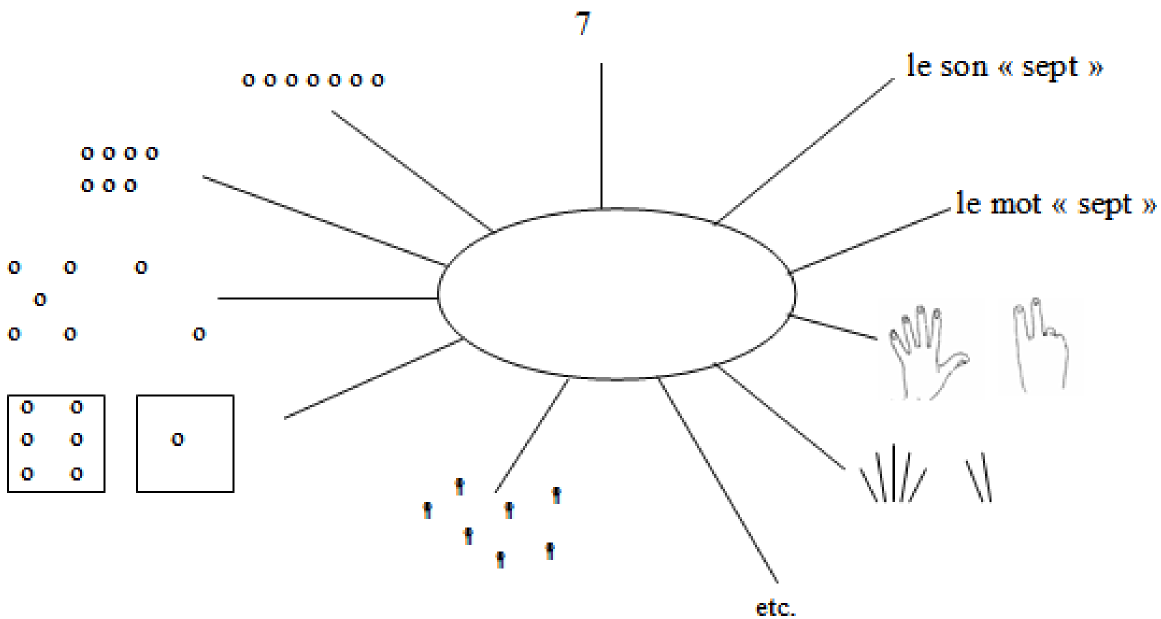
On est le 17.

1°) Combien de jours se sont passés depuis le 14 ?

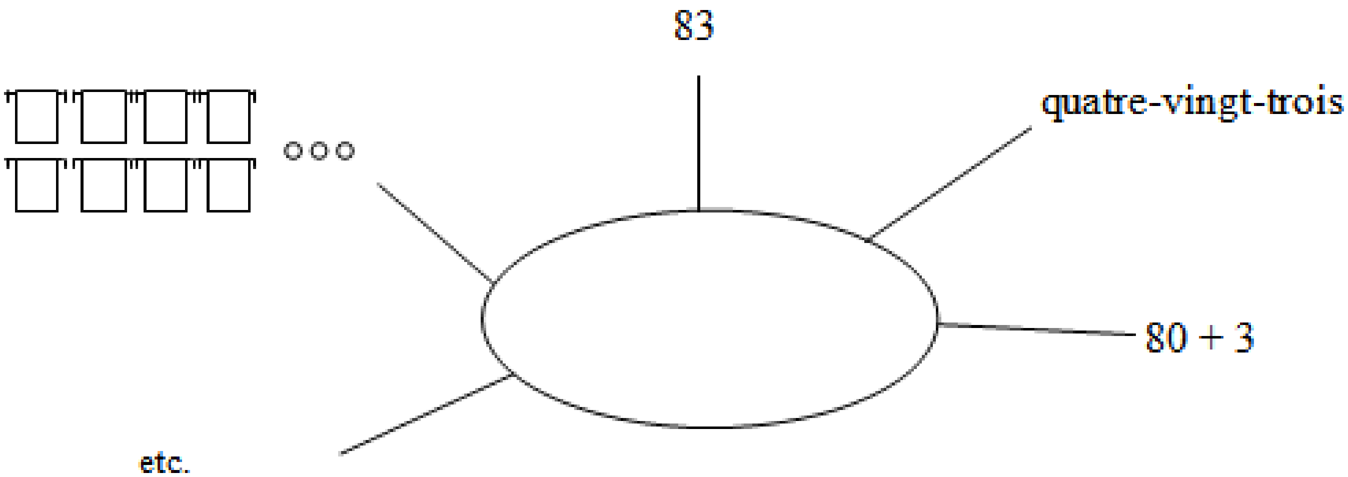
2°) La maîtresse Aline revient dans combien de jours ?

3°) Combien de jours jusqu’à l’anniversaire de Pierre ?

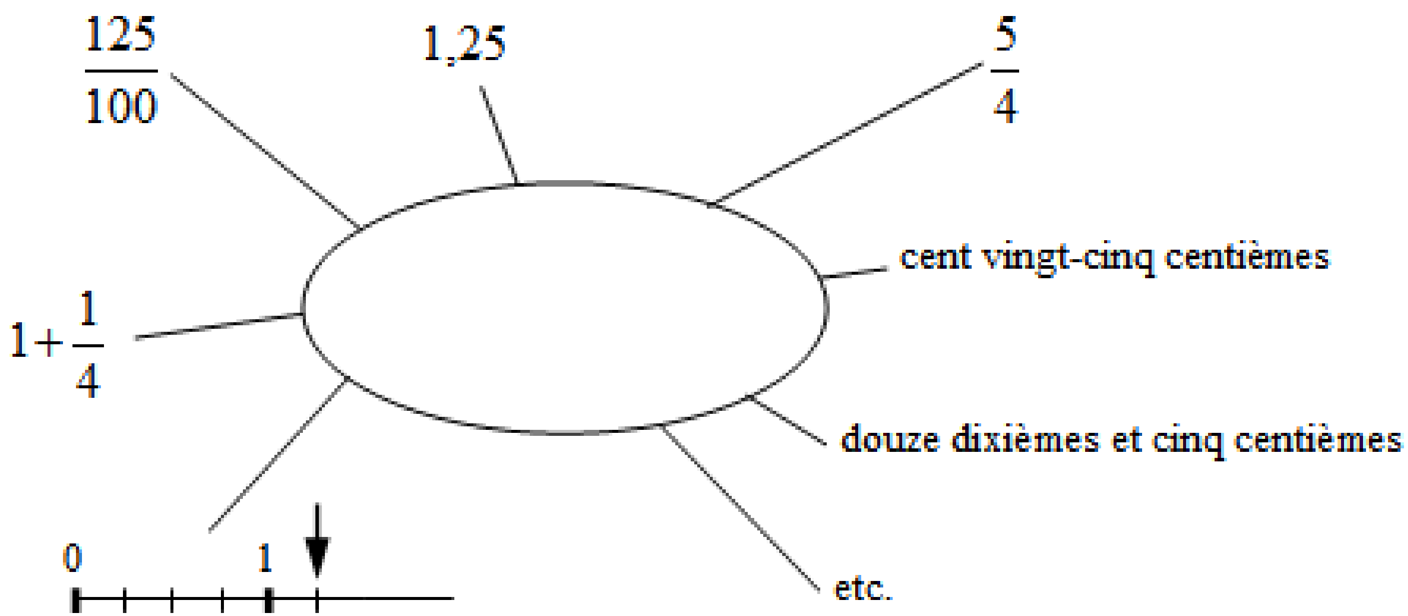
b) Faire comprendre qu'un nombre a plusieurs représentations et qu'il faut savoir passer d'une représentation à une autre



Ce qui sera poursuivi au cycle 2 :



Et au cycle 3 :



c) Faire comprendre que les nombres sont « liés les uns aux autres »

Idées et illustration extraites de l'ouvrage de Rémi Brissiaud « Premiers pas vers les maths – Les chemins de la réussite à l'école maternelle »

d) Roland Charnay dit que les objectifs suivants sont importants pour la maternelle dans le domaine de la construction du nombre :

- la stabilisation de la connaissance de la suite orale
- l'apprentissage de différentes méthodes pour dénombrer
- la connaissance de la correspondance suite orale-suite écrite par le biais de la bande numérique (trouver l'écriture chiffrée associée à un mot-nombre et trouver le mot-nombre associé à une écriture chiffrée)
- la compréhension du fait que les nombres sont des outils pour mémoriser des quantités (aspect cardinal du nombre)

  Activités citées par R. Charnay :
  - Réaliser une collection ayant le même nombre d'éléments qu'une collection donnée
  - Compléter une collection pour qu'elle ait le même nombre d'éléments qu'une collection donnée
  - Comparer des collections

- la compréhension du fait que les nombres sont des outils pour mémoriser des positions dans une liste rangée (aspect ordinal du nombre)

  Activités citées par R. Charnay :
  - Indiquer une position
  - Replacer un objet à sa position
  - Comparer des positions

Remarque : La manipulation est, bien évidemment intéressante pour s'approprier les situations et les problèmes posés mais Roland Charnay insiste aussi sur la fait qu' il est souhaitable d'amener les élèves à anticiper sur le résultat d'une manipulation car c'est ainsi qu'on peut amener l'élève à élaborer des procédures.

3°) Le point de vue de Piaget

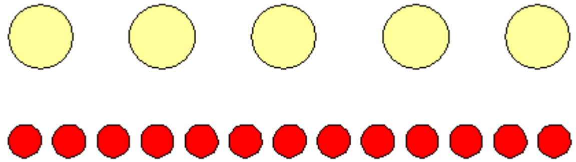
Dans la « Genèse du nombre chez l'enfant » (1941), Piaget essaye de mettre en évidence par une série d'expériences, les procédures par lesquelles les enfants « construisent » le nombre. Il rappelle d'abord que la connaissance de la comptine numérique ne saurait tenir compte de la connaissance du nombre. L'enfant qui la récite ne sait pas en effet l'utiliser pour dénombrer réellement.

On peut évoquer à ce propos l'expérience de la conservation de la quantité :

Lorsqu'on fait réaliser par un enfant de 4 ans une correspondance terme à terme entre deux séries de 5 à 6 jetons et qu'on lui demande, après avoir écarté un jeton, de comparer les deux collections, il n'est pas rare que l'enfant réponde qu'il y a, alors, plus de jetons jaunes. L'enfant qui donne cette réponse n'a pas encore acquis la conservation de la quantité.

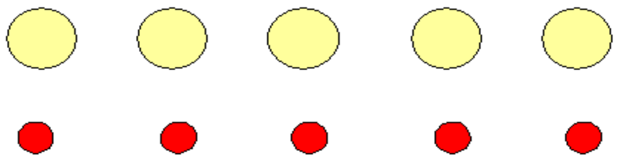
Expérienc

Avant 4 ans : stade de l’intuition simple, l’enfant s’appuie sur la perception

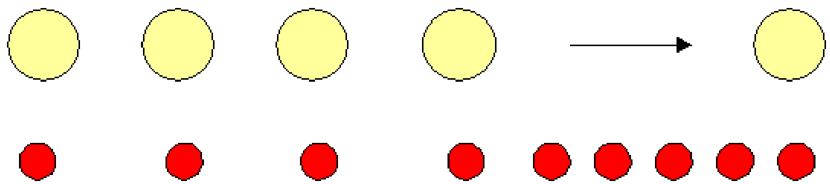


En jaune, c’est ce que l’on place, en rouge c’est ce que l’enfant place, il doit faire une égalité

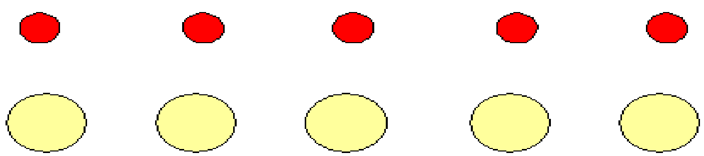
Entre 4 et 7 ans : stade de l'intuition articulée



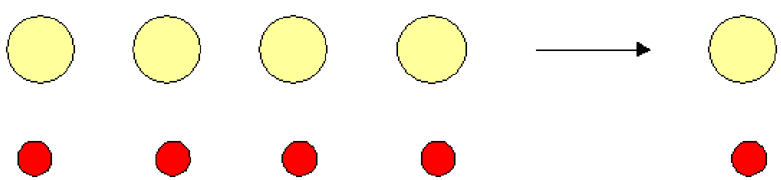
lace bien les jetons rouges mais si on déplace un jaune et on lui demande de représenter la même quantité alors l'élève se trompe
:L'enfant p



Entre 7 et 8 ans : stade de la conservation de l'opération



Et si on déplace un jaune et on lui demande de représenter la même quantité alors l'élève ne se trompe plus :



Le nom du nombre n'est encore qu'un moyen de désigner les éléments d'une collection et il n'y a pas conservation de l'invariant "quantité" dans les différentes présentations spatiales de la série d'objets.

De même, comme Piaget le montre à travers de nombreuses expériences, la réunion des parties d'une collection n'est pas égale à la totalité de cette collection.

L'enfant acquiert le concept de nombre quand il a atteint le « stade des opérations concrètes », c'est à dire à partir de quand il devient conservant (7/8ans). Il sait alors faire des sériations et réalise les inclusions de classe. Il y a simultanéité des trois opérations.

Cette conception va dans le sens d'une performance du nombre acquise par le déploiement de capacités successives indispensables, pour atteindre un niveau optimal quand l'enfant devient « conservant ».

Le genèse du concept de nombre est un processus endogène.

5°) Quelques précisions concernant la construction du concept de nombre en maternelle

a) La présence de bandes numériques collectives ou individuelles est importante. Elles doivent commencer par 1 et non 0.

La bande numérique doit être affichée dans la classe : c'est un outil à faire évoluer au long de l'année : à introduire au cours de Moyenne Section.

b) Il est souhaitable de varier les manières de répondre à la question « Combien y a-t-il de … ?»

- Le subitizing (reconnaissance immédiate de très petites quantités)
- comptage un par un : on utilise la comptine numérique
- utilisant de "collections-témoins organisées" (configurations spatiales diverses, configurations digitales, etc.) qui servent de repères

2. Enseignement des nombres entiers de l'école primaire au collège

	Dans les programmes	Problèmes et procédures	Langage
Maternelle	- Travail sur les quantités et les nombres (suite orale au moins jusqu'à 30)	-nombre, mémoire des quantités -Collections équipotentes -Comparaisons de quantités -Pratiques de dénombrement -Pb d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage, de repérage	-L'expression orale (mots-nombres) est dominante -Première approche de la relation avec les écritures chiffrées
Cycle 2	- Nombres inférieurs à 1000 - Numération décimale - Comparaison	-Dénombrer des quantités importantes -Utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position -Suites de nombres de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100… -Graduations -comparaison	- L'expression écrite en chiffres des nombres est dominante. - Le passage oral-chiffré doit être maîtrisé.
Cycle 3	- Nombres jusqu'au milliard - Numération décimale - Comparaison - Structuration arithmétique	Idem cycle 2 sur des nombres plus grands	Idem cycle 2 sur des nombres plus grands
Collège	Numération des entiers naturels consolidée en 6ème		

3- exemples d'activités de classe

- Cycle 1

Les tris/classements - la maison des nombres

Le lucky luke

Le chef d'orchestre

La boîte à oeufs

Le jeu des poupées

Le greli-grelo

Cycle 2

- Les maisons des nombres
- Les paquets de 10 - la dizaine
- Le jeu du banquier
- Zyglotron
- Stabiliser la comptine
- Les paquets de 100 - la centaine
- La droite numérique, le zéro… enfin.

Cycle 3

- La classe des milliers
- Les fourmillions
- Les grains de riz
- Les grands nombres
- Le vertige de l'infini…

4- les difficultés des élèves

- Difficultés principales.

Cycle 1: mémorisation de la comptine, coordonner geste-parole, organiser, surcompter, compléter, compter par paquets.

- Cycle 2

compléments à 10,

échange d’une dizaine,

codage/décodage des nombres en système décimal

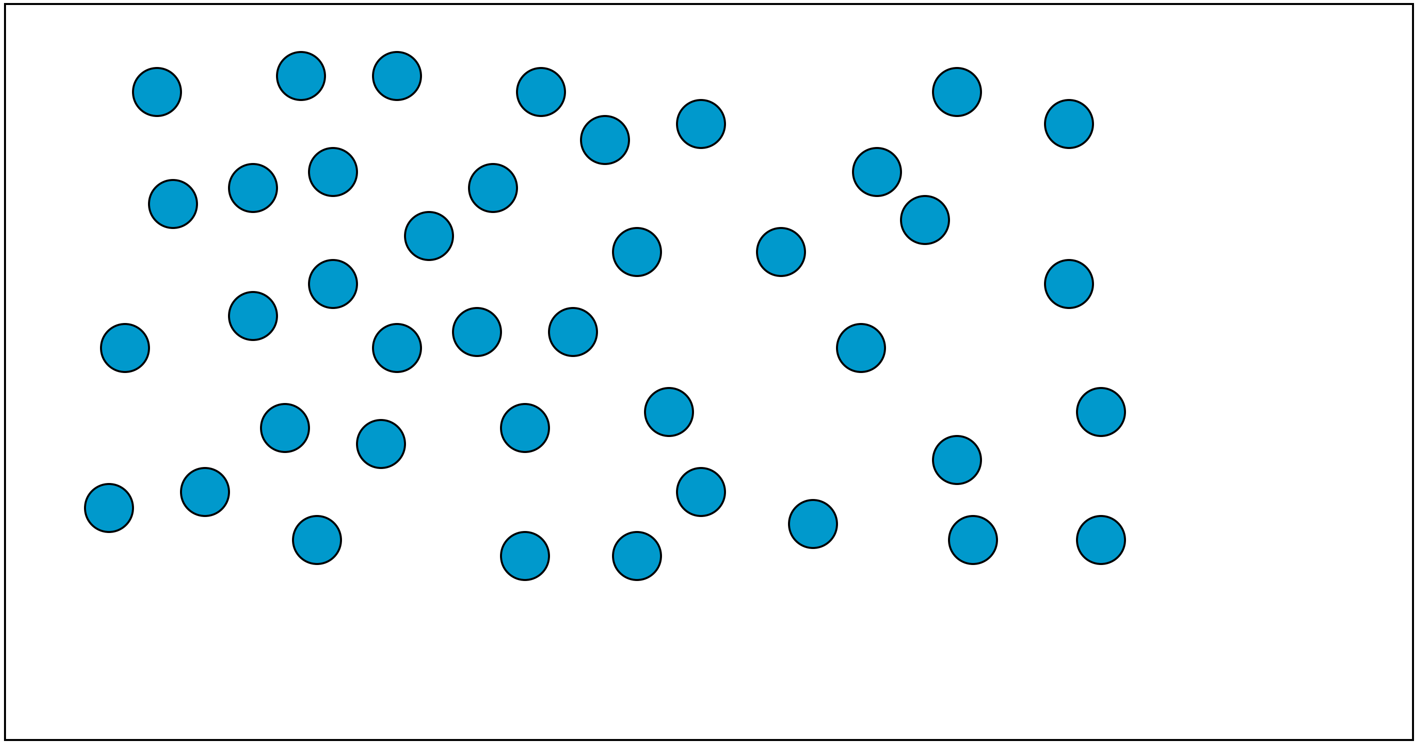
irrégularités de la numération orale

utiliser la frise numérique

utiliser la droite numérique, les piquets et les intervalles

la centaine, décomposition des nombres

Combien de points ?



Cycle 3

- Distinction chiffre/nombre
- La classe des mille, des millions
- La notion de nombre « rond », le calcul approché, l’ordre de grandeur
- L’encadrement

- Fin du diaporama

Crée par David Rolland, formateur en mathématiques pour l'IUFM de l'Université de la Polynésie française.

Références : documents de D.Pernoux (formateur en mathématiques à l'IUFM d'Alsace) et de M. Bourguet (ex formateur de mathématiques à l'IUFM de la Polynésie française).