4. Parallélogramme - 2

Soit un parallélogramme $ABCD$. On désigne par O le centre du parallélogramme, E le symétrique de A par rapport à B, F le symétrique de B par rapport à C, G le symétrique de C par rapport à D, H le symétrique de D par rapport à A.

Il semble que le quadrilatère $EFGH$ soit un parallélogramme. Montrons le en utilisant trois méthodes différentes.

Méthode 1 : *Calcul analytique.*

Indications : Choisir un repère ; donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$ et conclure.

Méthode 2 : *Transformations.*

Trouver les symétriques de E et F par rapport à O.

Méthode 3 : *Calcul vectoriel.*

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

5. Parallélogramme - 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. E le point du segment $[CD]$ tel que $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CE}$ et F donné par $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. Démontrer que les points B, C et F sont alignés.

2. Construire le point G défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Démontrer que les points E, O et G sont alignés.

3. Construire les points H et K définis par $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BD}$. Montrer que D est le milieu de $[AK]$ et de $[CH]$.

4. M, N, P et Q sont les points définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Prouver que $MNPQ$ est un parallélogramme .

6. Parallélogramme - 4

Soit un parallélogramme $ABCD$.

1. Construire les points E, F et H tels que $2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{DH} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{DA}$.

2. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Trouver k réel tel que $\overrightarrow{EH} = k\overrightarrow{EF}$. Que peut-on en déduire pour les points E, F et H ?

7. Parallélogramme - 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Placer les points I, J, K et L définis par : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

2. a. En utilisant la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

3. a. On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Déterminer dans ce repère les coordonnées des points A, B, C, D, I, J, K et L.

b. Les droites (IL) et (JK) sont-elles parallèles ? Justifier.

4. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?