PROBABILITES

Loi de probabilité

Univers

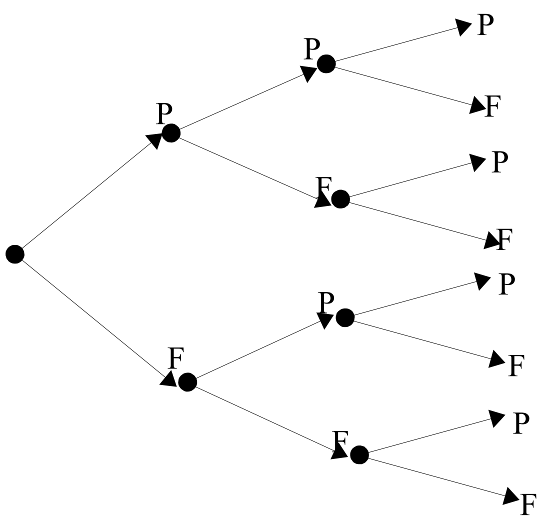
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. L'ensemble des résultats possibles, aussi appelés éventualités, est l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Exemples :

- jeu de Pile ou Face : on a deux résultats possibles, Pile ou Face, l'univers est U={Pile,Face}
- lancer un dé : on a six résultats possibles, l'univers est U={1, 2, 3, 4, 5, 6}
- lancer deux dés : l'univers est formé par l'ensemble des couples (x,y) où x et y sont des entiers pris entre 1 et 6, il contient 6x6=36 éléments, on peut le représenter par le tableau suivant :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- lancer de trois pièces : l'univers est formé de l'ensemble des triplets formés des lettres P (pour Pile) et F (pour face); il contient 2x2x2=8 éventualités que l'on peut représenter à l'aide d'un arbre.



Loi de probabilité

On définit une loi de probabilité sur un univers U={e_1, e_2, e_3, ..., e_n}en associant à chacune des éventualités e_i de U un réel positif ou nul p_i, ces réels vérifiant la relation $\mathbf{p_1+p_2+p_3+......+p_n = 1}$

Cette loi peut être notée dans un tableau :

e_1	e_2	e_3	......	e_n
p_1	p_2	p_3	......	p_n

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, les fréquences d'apparition des éventualités e_i tendent vers les p_i .

Equiprobabilité

Lorsque tous les p_i d'une loi de probabilité sont égaux, on est en situation d'équiprobabilité, on dit que la loi est équirépartie.

Si l'univers de la loi contient *n* éléments, on a $p_i=\frac{1}{n}$ quel que soit *i*.

Exemples

- Jeu de Pile ou Face
  Avec une pièce équilibrée, les deux faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

Pile	Face
1/2	1/2

- Lancement d'un dé
  Avec un dé équilibré, toutes les faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Evènements

On considère une expérience aléatoire et son univers $U=\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ muni d'une loi de probabilité *P*.

Probabilité d'un évènement

Un événement est une partie de l'univers. On dit qu'un événement est réalisé lorsque le résultat obtenu à l'issue d'une expérience est une éventualité contenue dans l'évènement.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses éventualités.

Exemple

On tire un dé, on appelle *A* l'évènement consistant à obtenir au moins 5.
On a alors $A=\{5 , 6\}$. Comme les probabilités d'obtenir 5 et 6 sont égales à 1/6, on aura $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Propriétés

- L'ensemble vide noté ∅ est appelé événement impossible, $P(\emptyset) = 0$.
- L'univers *U* est appelé événement certain, $P(U) = 1$.
- Pour tout événement *A*, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- Dans le cas d'une loi équirépartie, si l'univers *U* contient *n* éventualités et si l'évènement *A* contient *k* éventualités, alors $P(A)=\frac{k}{n}$.

On dit que $P(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$.

Exemple
Une urne contient 10 boules bleues et 5 boules rouges indiscernables au toucher. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?
Les boules étant indiscernables au toucher, on est dans un cas d'équiprobabilité.
Comme il y a 15 boules au total, l'univers contient 15 éventualités.
L'évènement « tirer une boule bleue » contient 10 éventualités.
La probabilité de tirer une boule bleue est donc $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Réunion et intersection d'évènements

La **réunion** des évènements *A* et *B* est l'évènement $A \cup B$ formé de toutes les éventualités appartenant à *A* **ou** à *B*. (il s'agit du **ou** inclusif, les éventualités peuvent appartenir aux deux évènements en même temps)
L'**intersection** des évènements *A* et *B* est l'évènement $A \cap B$ formé de toutes les éventualités appartenant à la fois à *A* **et** à *B*.
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, *A* et *B* n'ont aucune éventualité commune, on dit que ce sont des évènements disjoints ou incompatibles.

> Si *A* et *B* sont deux évènements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
> Si *A* et *B* sont deux évènements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Evènements contraires

Le contraire de l'évènement *A* est l'évènement $\overline{A}$ formé par toutes les éventualités de l'univers qui ne sont pas dans *A*.

> $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Variables aléatoires

Définition

Une variable aléatoire sur l'univers $U = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ est une fonction *X* définie sur *U*.
On note $(X=x_i)$ l'ensemble des éventualités e_i vérifiant $X(e_i) = x_i$.
Si *P* est la loi de probabilité de *U*, la loi de probabilité de *X* est donnée par l'ensemble des probabilités des évènements $(X=x_i)$.

Exemple
On lance un dé. On perd 2 euros si on tire 1 ou 2, on gagne 0,5 euros si on tire 3 et enfin on gagne 1euro si on tire 4, 5 ou 6. On appelle *X* la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage. Ainsi :
$X(1) = X(2) = -2$; $X(3) = 0{,}5$; $X(4) = X(5) = X(6) = 1$.
On a $(X=-2) = \{1,2\}$, $(X=0{,}5) = \{3\}$ et $(X=1) = \{4,5,6\}$, d'où
$P(X=-2) = 2/6 = 1/3$, $P(X=0{,}5) = 1/6$ et $P(X=1) = 3/6 = 1/2$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
***P*(*X*=*x*i)**	1/3	1/6	1/2

Espérance, variance et écart type.

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité P est donnée par le tableau :

X	x_1	x_2	x_3	……	x_n
P(X=x$_i$)	p_1	p_2	p_3	……	p_n

> On appelle espérance mathématique de X le nombre réel
> $E(X)=x_1\,p_1+x_2\,p_2+\cdots+x_n\,p_n=\sum p_i\,x_i$
>
> On appelle variance de X le nombre réel
> $V(X)=(x_1-E(X))^2\,p_1+(x_2-E(X))^2\,p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2\,p_n=\sum (x_i-E(X))^2\,p_i$
>
> On appelle écart type de X le nombre réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Exemple

Reprenons le jeu décrit au 1) et la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
P(X=xi)	1/3	1/6	1/2

On a alors $E(X)=-2\times\frac{1}{3}+0{,}5\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{-4}{6}+\frac{0{,}5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-0{,}5}{6}=\frac{-1}{12}$.

Comme l'espérance mathématique est négative, on peut penser que lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.