

Exercice 1 :**Partie 1 :**

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que pour tout réel x on ait

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \text{ et } P(1) = 0$$

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = P(n+1)$$

3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. En déduire la somme des carrés des 100 premiers entiers naturels non nuls.

Partie 2 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

On note \mathcal{C}_f sa représentation graphique.

- Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f
- Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
- Tracer \mathcal{C}_f et T dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions polynômiales du système (S) :

$$(S) \begin{cases} P(x) - \frac{x}{3}P'(x) + P''(x) = 0 \\ P'''(x) = 6 \end{cases}$$

où l'inconnue est le polynôme P , P'' représente la dérivée de P' et P''' la dérivée de P''

- Quel doit être le degré du polynôme P ?
- Démontrer que le coefficient du terme de degré 3 est 1.
- Exprimer $P(x) - \frac{x}{3}P'(x) + P''(x)$ en fonction de x .
- Conclure.